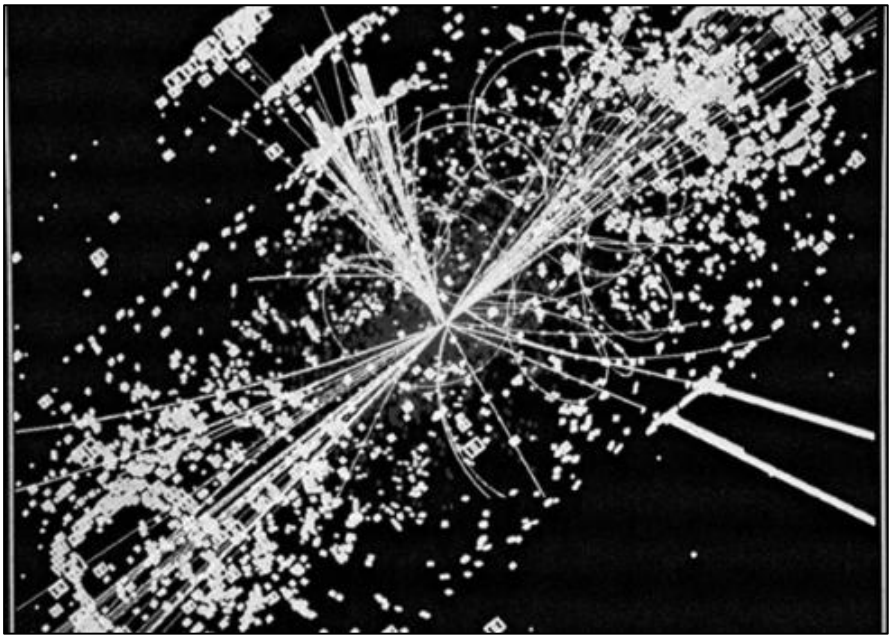
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, 2025 - 2026

Επίλυση Ασκήσεων Μαθήματος

Θεωρητική Φυσική

Άσκηση 9



Ονοματεπώνυμο: Αναστάσιος Μπατατέγας
Αριθμός Μητρώου: 09121431
Εξάμηνο: $9^{ο}$
Σχολή: ΕΜΦΕ
Email: tasosmntdew@gmail.com , ge21431@mail.ntua.gr
Διδάσκων: Ν. Τράκας

Άσκηση 9

Δείξτε ότι στο σύστημα Κέντρου Μάζας (CM frame) της αλληλεπίδρασης $\mathrm{AB} \to \mathrm{CD}$, οι όροι της προσπίπτουσας ροής σωματιδίων, F, και του Lorentz αναλλοίωτου παράγοντα φασικού χώρου, $\mathrm{d}Q$, στον τύπο της διαφορικής ενεργούς διατομής:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F}\mathrm{d}Q$$

γίνονται, αντίστοιχα:

$$\mathrm{d}Q = \frac{1}{4\pi^2}\frac{p_f}{4\sqrt{s}}\mathrm{d}\Omega\,, \qquad F = 4p_i\sqrt{s}$$

και έτσι ο τύπος της διαφορικής ενεργούς διατομής γίνεται:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{p_f}{p_i}|\mathcal{M}|^2$$

όπου $\mathrm{d}\Omega$ είναι το διαφορικό στοιχείο στερεάς γωνίας περί το (τρι-)διάνυσμα ορμής $\mathbf{p_C}$ στον φασικό χώρο του C σωματιδίου, $s \equiv W^2 \equiv (E_\mathrm{A} + E_\mathrm{B})^2$ το τετράγωνο της αναλλοίωτης μάζας, $|\mathbf{p_A}| = |\mathbf{p_B}| = p_i$ και $|\mathbf{p_C}| = |\mathbf{p_D}| = p_f$, όπως επιβάλει η επιλογή του συστήματος Κέντρου Μάζας.

Λύση

Προς επίλυση του προβλήματος, ακολουθούμε την ανάλυση και τον συμβολισμό των Σημειώσεων καθώς και του βιβλίου «*Quarks & Leptons* – F. Halzen, A. D. Martin». Για την αλληλεπίδραση $\mathrm{A} + \mathrm{B} \to \mathrm{C} + \mathrm{D}$, για την οποία θα εργαστούμε στο σύστημα του Κέντρου Μάζας (CM frame), η διαφορική ενεργός διατομή υπολογίζεται, έπειτα από αξιοποίηση του γενικού αποτελέσματος για το πλάτος μετάβασης, T_{fi}, ότι δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F}\mathrm{d}Q \tag{9.1}$$

όπου $\mathcal{M}$ το αναλλοίωτο πλάτος (invariant amplitude) της υπό μελέτη αλληλεπίδρασης ($\mathrm{A} + \mathrm{B} \to \mathrm{C} + \mathrm{D}$), ενώ, εξ ορισμού:

$$F \equiv |\mathbf{v_A} - \mathbf{v_B}| \cdot 2E_A \cdot 2E_B \equiv 4\sqrt{(\mathcal{p}_A \cdot \mathcal{p}_B)^2 - m_A^2 m_B^2} \tag{9.2}$$

είναι η (σχετική) Lorentz αναλλοίωτη προσπίπτουσα ροή σωματιδίων (ροή σωματιδίων A ως προς τα σωματίδια B, ή – ισοδύναμα – αντιστρόφως), και:

$$\mathrm{d}Q \equiv (2\pi)^4\,\delta^{(4)}(\mathcal{p}_C + \mathcal{p}_D - \mathcal{p}_A - \mathcal{p}_B)\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p_C}}{(2\pi)^3\,2E_C}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p_D}}{(2\pi)^3\,2E_D} \tag{9.3}$$

είναι ο Lorentz αναλλοίωτος παράγοντας φασικού χώρου. Εντός της τετραδιάστατης κατανομής δ εμφανίζονται οι αντίστοιχες τετρα-ορμές των σωματιδίων πριν και μετά την αλληλεπίδραση (και σημειώνονται με το καλλιγραφικό $\mathcal{p}$ για αποφυγή σύγχυσης).

Το σύστημα Κέντρου Μάζας (CM frame) ενός συστήματος σωματιδίων, ορίζεται από την απαίτηση η ολική ορμή των σωματιδίων να ισούται με μηδέν σε αυτό. Επομένως, στο σύστημα Κέντρου Μάζας της $\mathrm{A} + \mathrm{B} \to \mathrm{C} + \mathrm{D}$, και λαμβάνοντας υπόψη και την διατήρηση της ορμής μεταξύ των καταστάσεων πριν και μετά την αλληλεπίδραση, απαιτείται να ισχύουν οι ισότητες:

$$\mathbf{p}_{\boldsymbol{A}} + \mathbf{p}_{\boldsymbol{B}} = \mathbf{0} \tag{9.4a}$$

$$\mathbf{p}_{\boldsymbol{C}} + \mathbf{p}_{\boldsymbol{D}} = \mathbf{0} \tag{9.4b}$$

από τις οποίες συνεπάγονται οι σχέσεις:

$$\mathbf{p}_{\boldsymbol{A}} = -\mathbf{p}_{\boldsymbol{B}}\,, \qquad |\mathbf{p}_{\boldsymbol{A}}| = |\mathbf{p}_{\boldsymbol{B}}| \equiv p_i \tag{9.5a}$$

$$\mathbf{p}_{\boldsymbol{C}} = -\mathbf{p}_{\boldsymbol{D}}\,, \qquad |\mathbf{p}_{\boldsymbol{C}}| = |\mathbf{p}_{\boldsymbol{D}}| \equiv p_f \tag{9.5b}$$

Όπως είναι γνωστό από την στοιχειώδη σχετικιστική κινηματική, κατά τους μετασχηματισμούς Lorentz μεταξύ διαφόρων συστημάτων αναφοράς, για οποιοδήποτε σύστημα σωματιδίων διατηρείται πάντοτε αναλλοίωτη η ποσότητα (σε φυσικές μονάδες):

$$W^2 \equiv \left(\sum\nolimits_i E_i\right)^2 - \left(\sum\nolimits_i \mathbf{p}_{\boldsymbol{i}}\right)^2$$

όπου η ποσότητα W ονομάζεται *αναλλοίωτη μάζα*, δεδομένου ότι έχει διαστάσεις μάζας σε μονάδες MKS. Για την αλληλεπίδραση $\mathrm{A} + \mathrm{B} \to \mathrm{C} + \mathrm{D}$, στο σύστημα του Κέντρου Μάζας, και υπόψιν των (9.5), έπεται (πριν και μετά την αλληλεπίδραση) ότι:

$$s \coloneqq W^2 = (E_A + E_B)^2 \equiv (E_C + E_D)^2 \tag{9.6}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω διατήρησης ενέργειας και ορμής μεταξύ των καταστάσεων πριν και μετά την αλληλεπίδραση.

Στο σύστημα Κέντρου Μάζας (CM frame), ο Lorentz αναλλοίωτος παράγοντας φασικού χώρου, (9.3), γράφεται:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q &= (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(\mathscr{p}_C + \mathscr{p}_D - \mathscr{p}_A - \mathscr{p}_B)\, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_{\boldsymbol{C}}}{(2\pi)^3\, 2E_C}\, \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}_{\boldsymbol{D}}}{(2\pi)^3\, 2E_D} \\ &\overset{(9.4a)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\, \frac{1}{4E_C E_D}\, \delta(E_C + E_D - E_A - E_B)\, \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\boldsymbol{C}} + \mathbf{p}_{\boldsymbol{D}})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}_{\boldsymbol{C}}\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}_{\boldsymbol{D}} \end{aligned} \tag{9.7}$$

Στην τελευταία σχέση, εμφανίζεται μία τρισδιάστατη κατανομή δ του Dirac πολλαπλασιασμένη επί τα διαφορικά στοιχεία όγκου του χώρου των φάσεων των σωματιδίων C, D. Η ύπαρξη της κατανομής δ συνεπάγεται τον μηδενισμό της ολικής ορμής μετά την αλληλεπίδραση, δηλαδή, την διατήρηση της ορμής μεταξύ των καταστάσεων πριν και μετά την αλληλεπίδραση (δεδομένου ότι η αρχική κατάσταση νοείται ως προς το σύστημα Κέντρου Μάζας των A και B, βλ. σχέσεις (9.4)).

Ο χειρισμός του όρου $\delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\boldsymbol{C}} + \mathbf{p}_{\boldsymbol{D}})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}_{\boldsymbol{C}}\, \mathrm{d}^3\mathbf{p}_{\boldsymbol{D}}$ μπορεί να πραγματοποιηθεί, αφενός αποκλειστικά με αναλυτικό τρόπο, αφετέρου πιο διαισθητικά και «ποιοτικά». Από μαθηματικής σκοπιάς, ολοκληρώνοντας σε όλο τον χώρο των φάσεων, τόσο για το σωματίδιο C, όσο και για το D, έχουμε ότι:

$$\iiint_{\mathbf{p_C}} \iiint_{\mathbf{p_D}} \delta^{(3)}(\mathbf{p_C} + \mathbf{p_D})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p_C}\, \mathrm{d}^3\mathbf{p_D} = \iiint_{\mathbf{p_C}} \left(\iiint_{\mathbf{p_D}} \delta^{(3)}(\mathbf{p_C} + \mathbf{p_D})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p_D} \right) \mathrm{d}^3\mathbf{p_C} \qquad (9.8)$$

και λόγω της γνωστής ιδιότητας του συναρτησιακού δ του Dirac:

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})\, \mathrm{d}^3\mathbf{x} = f(\mathbf{x_0})$$

ισχύει ότι (για $f(\mathbf{x}) = 1$):

$$\iiint_{\mathbf{p_D}} \delta^{(3)}(\mathbf{p_C} + \mathbf{p_D})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p_D} = 1(-\mathbf{p_C}) \equiv 1$$

και η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι:

$$\iiint_{\mathbf{p_C}} \iiint_{\mathbf{p_D}} \delta^{(3)}(\mathbf{p_C} + \mathbf{p_D})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p_C}\, \mathrm{d}^3\mathbf{p_D} = \iiint_{\mathbf{p_C}} \mathrm{d}^3\mathbf{p_C}$$

Επομένως, αναλυτικά, και υπό την παραπάνω ολοκληρωτική θεώρηση, μπορεί να γραφεί η *ισότητα κατανομών*:

$$\delta^{(3)}(\mathbf{p_C} + \mathbf{p_D})\, \mathrm{d}^3\mathbf{p_C}\, \mathrm{d}^3\mathbf{p_D} = \mathrm{d}^3\mathbf{p_C} \qquad (9.9)$$

Επομένως, η (9.7) γράφεται ως εξής:

$$\mathrm{d}Q = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{4E_C E_D} \delta(E_C + E_D - E_A - E_B)\, \mathrm{d}^3\mathbf{p_C} \qquad (9.10)$$

Πιο διαισθητικά και ποιοτικά, δεδομένου ότι ισχύει η διατήρηση της ορμής μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης, σχέσεις (9.4), συμπεραίνεται ότι ο χώρος των φάσεων του σωματιδίου D, σχετίζεται με τον χώρο των φάσεων του σωματιδίου C, μέσω της σχέσης $\mathbf{p_C} = -\mathbf{p_D}$. Επομένως, μία κατάσταση ορμής για το σωματίδιο C, καθορίζει πλήρως την κατάσταση ορμής για το σωματίδιο D, ώστε για κάθε μία από τις προσπελάσιμες δυνατές καταστάσεις ορμής για το C αντιστοιχεί μία δυνατή κατάσταση για το D. Έτσι, ο αριθμός των τελικών καταστάσεων ορμής για τα C και D δίνεται από την σχέση:

$$\text{No. of available final states} = \frac{V\, \mathrm{d}^3\mathbf{p_C}}{(2\pi)^3\, 2E_C} \times \frac{V \cdot 1}{(2\pi)^3\, 2E_D}$$

όπου οι παράγοντες $2E$ εισάγονται από την επιλεγμένη κανονικοποίηση των κυματοσυναρτήσεων ($2E$ σωματίδια ανά όγκο V). Με βάση το παραπάνω επιχείρημα, προκύπτει και πάλι η σχέση (9.10) για το Lorentz αναλλοίωτο στοιχείο φασικού χώρου, όπου η συνάρτηση $\delta^{(4)}(\mathcal{p}_C + \mathcal{p}_D - \mathcal{p}_A - \mathcal{p}_B)$ αντικαθίσταται από την μονοδιάστατη $\delta(E_C + E_D - E_A - E_B)$, διότι η διατήρηση της ορμής μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης έχει επιβληθεί «δια χειρός» με το παραπάνω επιχείρημα.

Εκφράζοντας το στοιχείο όγκου $\mathrm{d}^3\mathbf{p_C}$ σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες στον χώρο των φάσεων του σωματιδίου C, λαμβάνουμε από την αντίστοιχη μετρική (και δεδομένου ότι $|\mathbf{p_C}| \equiv p_f$) ότι:

$$\mathrm{d}^3\mathbf{p_C} = p_f^2\, \mathrm{d}p_f\, d\Omega$$

όπου dΩ είναι το διαφορικό στοιχείο στερεάς γωνίας ως προς τον «άξονα» $\mathbf{p_C}$ στον φασικό χώρο του C. Με βάση την παραπάνω σχέση, η (9.10) γράφεται:

$$\mathrm{d}Q = \frac{1}{4\pi^2}\frac{p_f^2\,\mathrm{d}p_f\,d\Omega}{4E_CE_D}\delta(E_C+E_D-E_A-E_B) \tag{9.11}$$

Δεδομένου ότι η κατανομή δ περιλαμβάνει τις ενέργειες των σωματιδίων, ενώ ο πολλαπλασιαστικός της παράγοντας την ορμή p_f, κρίνεται χρήσιμη η έκφραση του διαφορικού $p_f^2\,\mathrm{d}p_f$ ως προς την αναλλοίωτη μάζα $W \equiv \sqrt{s}$. Είναι (βλ. (9.6)):

$$\sqrt{s} \equiv W = E_C + E_D = \sqrt{m_C^2+p_f^2} + \sqrt{m_D^2+p_f^2}$$

οπότε, διαφορίζοντας ως προς p_f, λαμβάνουμε ότι:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}p_f} = \left(\frac{1}{E_C}+\frac{1}{E_D}\right)p_f \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}p_f = \frac{E_CE_D}{E_C+E_D}\frac{1}{p_f}dW$$

Εισάγοντας το τελευταίο αποτέλεσμα στην (9.11) λαμβάνουμε:

$$\mathrm{d}Q = \frac{1}{4\pi^2}\frac{p_f}{4}\left(\frac{1}{E_C+E_D}\right)\,\delta(E_C+E_D-W)\,\mathrm{d}W\,\mathrm{d}\Omega \tag{9.12}$$

Ο όρος $\delta(E_C+E_D-W)\,\mathrm{d}W\,\mathrm{d}\Omega$ αντιμετωπίζεται ομοίως με την εξαγωγή της ισότητας κατανομών (9.9). Συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$\iint \delta(E_C+E_D-W)\,\mathrm{d}W\,\mathrm{d}\Omega\; = \int\left(\int \delta(E_C+E_D-W)\,\mathrm{d}W\right)\mathrm{d}\Omega = \int \mathrm{d}\Omega$$

επομένως, μπορούμε να γράψουμε την ισότητα κατανομών:

$$\delta(E_C+E_D-W)\,\mathrm{d}W\,\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\Omega \tag{9.13}$$

βάσει της οποίας, η σχέση (9.12) δίνει (υπόψιν της (9.6)):

$$\boxed{\mathrm{d}Q|_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{p_f}{4\sqrt{s}}\,\mathrm{d}\Omega} \tag{9.14}$$

που είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Στο σύστημα Κέντρου Μάζας (CM frame) η (σχετική) προσπίπτουσα Lorentz αναλλοίωτη ροή σωματιδίων (ροή σωματιδίων A ως προς τα σωματίδια B, ή – ισοδύναμα – αντιστρόφως), (9.2), γράφεται:

$$\begin{aligned}
F &\equiv 4\sqrt{(p_A\cdot p_B)^2 - m_A^2m_B^2} = 4\sqrt{(E_AE_B - \mathbf{p_A}\cdot\mathbf{p_B})^2 - m_A^2m_B^2} \\
&\overset{(9.5a)}{=} 4\sqrt{(E_AE_B+p_i^2)^2 - m_A^2m_B^2} = 4\sqrt{E_A^2\,E_B^2 + p_i^4 + 2E_AE_Bp_i^2 - m_A^2m_B^2} \\
&= 4\sqrt{(m_A^2+p_i^2)(m_B^2+p_i^2) + p_i^4 + 2E_AE_Bp_i^2 - m_A^2m_B^2} \\
&= 4\sqrt{2p_i^4 + p_i^2(m_A^2+m_B^2) + 2E_AE_Bp_i^2}
\end{aligned}$$

$$= 4\sqrt{p_i^2(m_A^2 + p_i^2) + p_i^2(m_B^2 + p_i^2) + 2E_A E_B p_i^2}$$
$$= 4\sqrt{(p_i E_A)^2 + (p_i E_B)^2 + 2E_A E_B p_i^2}$$
$$= 4\sqrt{(p_i E_A + p_i E_B)^2} = 4p_i(E_A + E_B) \overset{(9.6)}{\widehat{=}} 4p_i\sqrt{s}$$

Επομένως, έχουμε το αποτέλεσμα:

$$\boxed{F|_{\mathrm{CM}} = 4p_i\sqrt{s}} \tag{9.15}$$

Οι σχέσεις (9.14) και (9.15), υπόψιν την σχέσης (9.1), συνεπάγονται ότι στο σύστημα Κέντρου Μάζας (CM frame), η διαφορική ενεργός διατομή της υπό μελέτη αλληλεπίδρασης $\mathrm{AB} \to \mathrm{CD}$, ισούται με:

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{p_f}{p_i}|\mathcal{M}|^2} \tag{9.16}$$

που είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■