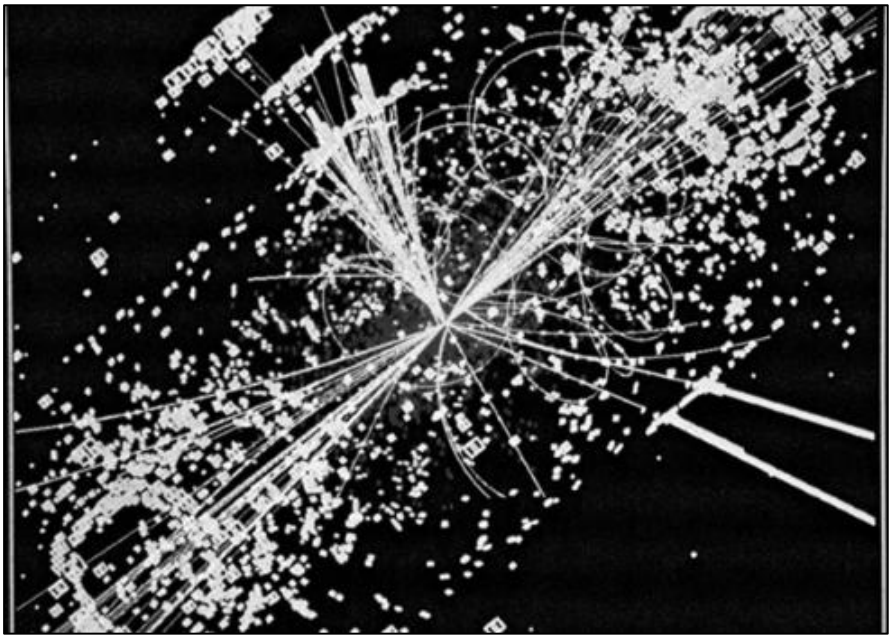
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, 2025 - 2026

Επίλυση Ασκήσεων Μαθήματος

Θεωρητική Φυσική

Άσκηση 18



Ονοματεπώνυμο: Αναστάσιος Μπατατέγας
Αριθμός Μητρώου: 09121431
Εξάμηνο: $9^{ο}$
Σχολή: ΕΜΦΕ
Email: tasosmntdew@gmail.com , ge21431@mail.ntua.gr
Διδάσκων: Ν. Τράκας

Άσκηση 18

Δείξτε ότι οι τέσσερις (ιδιο-)λύσεις, $u^{(r)}(\not{p})$, $r \in \{1,2,3,4\}$, ελεύθερου σωματιδίου της εξίσωσης Dirac:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi = 0\,, \qquad \psi_{\text{free particle}} \equiv u(\not{p})\, e^{-i\not{p}\cdot x}$$

είναι μεταξύ τους ορθογώνιες:

$$u^{(r)\,\dagger}u^{(s)} = 0, \qquad \forall\, r \neq s,\ \ r,s \in \{1,2,3,4\}$$

ως προς το εσωτερικό γινόμενο που κληρονομεί ο χώρος των spinors τεσσάρων διαστάσεων από τον χώρο πινάκων $\mathbb{C}^{4\times 1}$.

Λύση

Προς επίλυση του προβλήματος, ακολουθούμε την ανάλυση και τον συμβολισμό των Σημειώσεων καθώς και του βιβλίου «*Quarks & Leptons* – F. Halzen, A. D. Martin». Για ελεύθερο σωματίδιο, οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της ορμής στην αναπαράσταση θέσης έχουν την μορφή του συνήθους πυρήνα ενός κυματοπακέτου:

$$\psi_{\text{free particle}} \equiv u(\not{p})\, e^{-i\not{p}\cdot x} \tag{18.1}$$

όπου $u(\not{p})$ είναι ένας spinor διάστασης 4 που εξαρτάται μόνο από την τετρα-ορμή $\not{p}$ του σωματιδίου (x είναι το τετράνυσμα θέσης του σωματιδίου). Γράφοντας την εξίσωση Dirac για τις ιδιοτιμές ενέργειας:

$$H\psi \equiv (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m)\psi = E\psi \tag{18.2}$$

όπου για τους 4×4 πίνακες $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}), \beta$ χρησιμοποιείται η αναπαράσταση Dirac – Pauli:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I_{2\times 2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I_{2\times 2}} \end{pmatrix} \tag{18.3a}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{18.3b}$$

και αντικαθιστώντας την μορφή (18.1), λαμβάνουμε το σύστημα εξισώσεων:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\, u_B = (E - m)u_A \tag{18.4a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\, u_A = (E + m)u_B \tag{18.4b}$$

όπου έχουμε διαχωρίσει τους spinors $u(\not{p})$ ως:

$$u(\not{p}) \coloneqq \begin{pmatrix} u_A(\not{p}) \\ u_B(\not{p}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \tag{18.5}$$

Ουσιαστικά, ο χώρος των spinors $u(\not{p})$, διάστασης 4, διαχωρίζεται στο ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων του, διάστασης 2, σε καθέναν από τους οποίους ανήκουν τα u_A, u_B. Για μετέπειτα αναφορά, συμβολίζουμε αυτούς τους γραμμικούς χώρους ως $u \in \mathcal{S}$, $u_A \in \mathcal{S}_A$ και $u_B \in \mathcal{S}_B$, με $\dim\mathcal{S} = 4$, $\dim\mathcal{S}_A = \dim\mathcal{S}_B = 2$, και:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$$

Σημειώνεται ότι ο $\mathcal{S}$ αποτελεί γραμμικό χώρο επί του $\mathbb{C}$, εξαιτίας της γραμμικότητας του συστήματος (18.4), η οποία ανάγεται στην γραμμικότητα της εξίσωσης Dirac, (18.2). Προς επίλυση του συστήματος (18.4), λαμβάνουμε αρχικά δύο *γραμμικώς ανεξάρτητες* λύσεις, $u^{(1)}, u^{(2)}$, θεωρώντας μία βάση του υπόχωρου $\mathcal{S}_A$, και υπό τον υπαινισσόμενο ισομορφισμό $\mathcal{S}_A \sim \mathbb{C}^{2\times 1}$, θεωρούμε $u_A^{(s)} = \chi^{(s)}$, $s \in \{1,2\}$, όπου:

$$\chi^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{18.6}$$

Αντικαθιστώντας στην $(18.4b)$ λαμβάνουμε τους αντίστοιχους spinors του χώρου $\mathcal{S}_B$:

$$u_B^{(s)} = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)}, \qquad s \in \{1,2\} \tag{18.7}$$

οι οποίοι αποτελούν επίσης βάση του $\mathcal{S}_B$ (ως ανάλογοι των $\chi^{(s)}$, και υπό τον ισομορφισμό $\mathcal{S}_B \sim \mathbb{C}^{2\times 1}$). Από τις παραπάνω λύσεις, (18.6), (18.7), με αντικατάσταση στην $(18.4a)$, λαμβάνουμε την αντίστοιχη ιδιοτιμή ενέργειας (σχέση διασποράς):

$$E \equiv E_+ = +|\mathcal{p}| \equiv +\sqrt{p^2+m^2} \tag{18.8}$$

μετά από απαίτηση ταύτισης των λύσεων (18.6), (18.7) με τις αντίστοιχες λύσεις για την περίπτωση σωματιδίου σε ηρεμία ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$). Επομένως, οι ιδιοκαταστάσεις θετικής ενέργειας της εξίσωσης Dirac είναι ($N = \text{const.}$ για κανονικοποίηση):

$$\boxed{u^{(s)} = N\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}, \qquad s \in \{1,2\}, \qquad E = +\sqrt{p^2+m^2} > 0} \tag{18.9a}$$

Ομοίως, θεωρώντας μία βάση του υπόχωρου $\mathcal{S}_B$, υπό τον ισομορφισμό $\mathcal{S}_B \sim \mathbb{C}^{2\times 1}$, και ακολουθώντας παρόμοια ανάλυση, λαμβάνουμε τις ιδιοκαταστάσεις αρνητικής ενέργειας της εξίσωσης Dirac ($N = \text{const.}$ για κανονικοποίηση):

$$\boxed{u^{(s+2)} = N\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \qquad s \in \{1,2\}, \qquad E = -\sqrt{p^2+m^2} < 0} \tag{18.9b}$$

Στις δύο τελευταίες σχέσεις, ο 2×2 πίνακας $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \equiv \sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z$ δίνεται, στην αναπαράσταση Dirac – Pauli, από την έκφραση:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \equiv \sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \tag{18.10}$$

όπου $\mathbf{p} \equiv (p_x, p_y, p_z) \equiv -\boldsymbol{i}\boldsymbol{\nabla} = -i(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, ενώ από την (18.10) είναι εμφανές ότι ο τελεστής $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$ είναι Ερμιτιανός:

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^\dagger = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \tag{18.11}$$

Σε αυτό το σημείο ελέγχουμε την ορθογωνιότητα των καταστάσεων (18.9). που είναι και το ζητούμενο της άσκησης. Αρχικά, οι spinors $u^{(1)}$ και $u^{(2)}$ είναι, εκ κατασκευής ορθογώνιοι. Πράγματι, η βάση $\{\chi^{(s)}, s \in 1,2\}$ του υπόχωρου $\mathcal{S}_A$ είναι ορθογώνια, ενώ οι αντίστοιχοι spinors που προκύπτουν για τον υπόχωρο $\mathcal{S}_B$ είναι επίσης ορθογώνιοι.

Το τελευταίο συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι τα γινόμενα $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\chi^{(1)}$, $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\chi^{(2)}$ δίνουν την πρώτη και δεύτερη στήλη του τελεστή $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$, αντίστοιχα, οι οποίες είναι προφανώς ορθογώνιες μεταξύ τους, βλ. (18.10):

$$\begin{pmatrix} p_z \\ p_x+ip_y \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} p_x-ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} = (p_z \quad p_x-ip_y)\begin{pmatrix} p_x-ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} = 0$$

Ομοίως, οι spinors $u^{(3)}$ και $u^{(4)}$ είναι επίσης ορθογώνιοι, εκ κατασκευής. Απομένουν οι σχέσεις ορθογωνιότητας μεταξύ των spinors $u^{(1,2)}$ και $u^{(3,4)}$. Θεωρώντας αρχικά τους $u^{(1)}$ και $u^{(3)}$, παρατηρούμε ότι το μέρος του $u^{(1)}$ που ανήκει στον $\mathcal{S}_A$, είναι το $\chi^{(1)}$, ενώ το μέρος του $u^{(3)}$ που ανήκει στον $\mathcal{S}_A$ είναι ανάλογο του $-(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\chi^{(1)}$, που είναι η πρώτη στήλη του τελεστή $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}$, βλ. (18.10). Οπότε το γινόμενο των $u^{(1)}$ και $u^{(3)}$ θα δώσει από τον υπόχωρο $\mathcal{S}_A$ έναν όρο $-p_z$. Αντίστοιχα, μελετώντας τα μέρη που ανήκουν στον $\mathcal{S}_B$, προκύπτει ότι το γινόμενο των $u^{(1)}$ και $u^{(3)}$ θα δώσει από τον υπόχωρο $\mathcal{S}_B$ έναν όρο $+p_z$. Επομένως, αθροιστικά, το γινόμενο ισούται με μηδέν, και οι καταστάσεις $u^{(1)}$ και $u^{(3)}$ είναι ορθογώνιες. Ομοίως, όλα τα υπόλοιπα ζεύγη καταστάσεων μεταξύ των λύσεων θετικής και αρνητικής ενέργειας είναι ορθογώνια.

Υπό τους ισομορφισμούς των $\mathcal{S}_A \sim \mathbb{C}^{2\times1}$, $\mathcal{S}_B \sim \mathbb{C}^{2\times1}$ και $\mathcal{S} \sim \mathbb{C}^{4\times1}$, οι οποίοι καθιστούν τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα μεταξύ spinors ταυτόσημα με τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα πινάκων, μπορούμε να δείξουμε τις παραπάνω σχέσεις ορθογωνιότητας αναλυτικά ως εξής (οι σταθερές κανονικοποίησης δεν σημειώνονται στις παρακάτω ισότητες):

$$\begin{aligned}
u^{(1)\,\dagger}u^{(2)} &= \begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(1)} \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} \chi^{(2)} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{(1)\,\dagger} & \chi^{(1)\,\dagger}\dfrac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^{\dagger}}{E+m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi^{(2)} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(2)} \end{pmatrix} \\
&\overset{(18.11)}{=} \chi^{(1)\,\dagger}\chi^{(2)} + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(1)}\right)^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(2)} \\
&\overset{(18.10)}{=} 0 + \frac{1}{(E+m)^2}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x+ip_y \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} p_x-ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} = 0 \\
u^{(3)\,\dagger}u^{(4)} &= \begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{(1)\,\dagger}\dfrac{(-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^{\dagger}}{|E|+m} & \chi^{(1)\,\dagger} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} \\
&\overset{(18.11)}{=} \chi^{(1)\,\dagger}\chi^{(2)} + \left(\frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(1)}\right)^{\dagger}\frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(2)} \\
&\overset{(18.10)}{=} 0 + \frac{1}{(|E|+m)^2}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x+ip_y \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} p_x-ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} = 0 \\
u^{(1)\,\dagger}u^{(3)} &= \begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(1)} \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{(1)\,\dagger} & \chi^{(1)\,\dagger}\dfrac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^{\dagger}}{E+m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{pmatrix} \\
&\overset{(18.11)}{=} \chi^{(1)\,\dagger}\frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(1)} + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(1)}\right)^{\dagger}\chi^{(1)} \\
&\overset{(18.10)}{=} \frac{1}{|E|+m}(1 \quad 0)\begin{pmatrix} -p_z \\ -p_x-ip_y \end{pmatrix} + \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix} p_z \\ p_x+ip_y \end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(-p_z+p_z)}{E+m} = 0
\end{aligned}$$

$$u^{(1)\,\dagger}u^{(4)} = \begin{pmatrix} \chi^{(1)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(1)} \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{(1)\,\dagger} & \chi^{(1)\,\dagger}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^{\dagger}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(18.11)}{=} \chi^{(1)\,\dagger}\frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(2)} + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(1)}\right)^{\dagger}\chi^{(2)}$$

$$\overset{(18.10)}{=} \frac{1}{|E|+m}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p_x+ip_y \\ p_z\end{pmatrix} + \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix}p_z \\ p_x+ip_y\end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \cdots = 0$$

$$u^{(2)\,\dagger}u^{(3)} = \begin{pmatrix} \chi^{(2)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(2)} \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{(2)\,\dagger} & \chi^{(2)\,\dagger}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^{\dagger}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(18.11)}{=} \chi^{(2)\,\dagger}\frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(1)} + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(2)}\right)^{\dagger}\chi^{(1)}$$

$$\overset{(18.10)}{=} \frac{1}{|E|+m}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p_z \\ -p_x-ip_y\end{pmatrix} + \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix}p_x-ip_y \\ -p_z\end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix} = \cdots = 0$$

$$u^{(2)\,\dagger}u^{(4)} = \begin{pmatrix} \chi^{(2)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(2)} \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{(2)\,\dagger} & \chi^{(2)\,\dagger}\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^{\dagger}}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(18.11)}{=} \chi^{(2)\,\dagger}\frac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(2)} + \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(2)}\right)^{\dagger}\chi^{(2)}$$

$$\overset{(18.10)}{=} \frac{1}{|E|+m}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-p_x+ip_y \\ p_z\end{pmatrix} + \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix}p_x-ip_y \\ -p_z\end{pmatrix}^{\dagger}\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix} = \frac{(+p_z-p_z)}{E+m} = 0$$

Επομένως, οι ιδιοκαταστάσεις ενέργειας που προκύπτουν από την εξίσωση Dirac, υπό την παραπάνω θεώρηση βάσεων $\{\chi^{(s)}, s \in 1{,}2\}$ στους υποχώρους $\mathcal{S}_A$, $\mathcal{S}_B$ αντίστοιχα, είναι πράγματι ορθογώνιες:

$$\boxed{u^{(r)\,\dagger}u^{(s)} = 0, \qquad \forall\, r \neq s,\ \ r,s \in \{1,2,3,4\}} \tag{18.12}$$

ως προς το εσωτερικό γινόμενο που επάγεται από τους ισομορφισμό $\mathcal{S} \sim \mathbb{C}^{4\times 1}$. Σημειώνεται ότι, αν και η παραπάνω ανάλυση πραγματοποιήθηκε στην αναπαράσταση Dirac – Pauli των πινάκων $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}), \beta$, εντούτοις τα συμπεράσματα ισχύουν για κάθε αναπαράσταση. Η ορθογωνιότητα των λύσεων της εξίσωσης Dirac είναι απόρροια της *άλγεβρας* που ικανοποιούν οι πίνακες $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}), \beta$, και κατά συνέπεια της μορφής της Hamiltonian του Dirac, (18.2). Οι τέσσερις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις ελεύθερου σωματιδίου (18.9) της εξίσωσης Dirac αποτελούν μία *πλήρη* και *ορθοκανονική βάση* του γραμμικού χώρου $\mathcal{S}$ των spinors διάστασης 4, σε κάθε αναπαράσταση των $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \boldsymbol{\alpha_3}), \beta$. ■