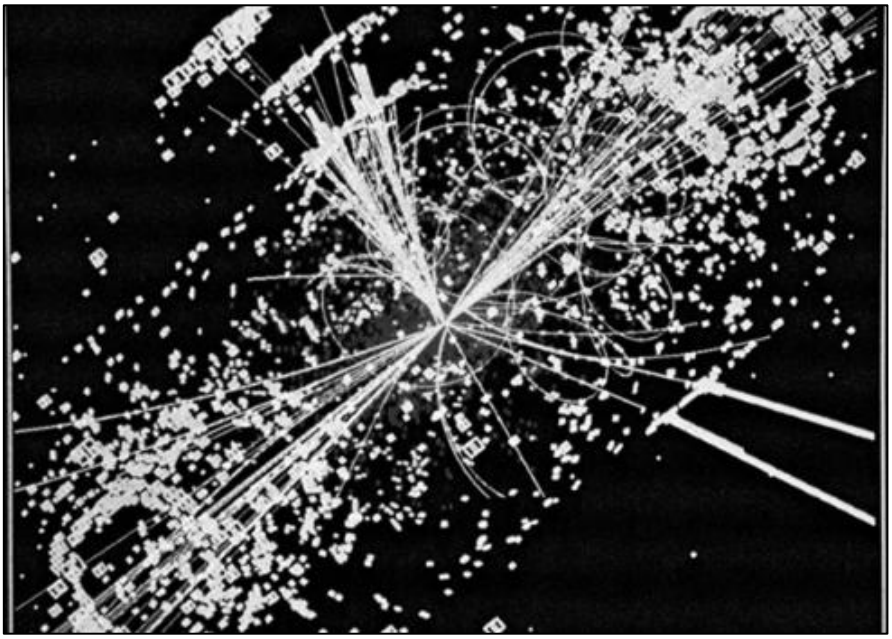
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, 2025 - 2026

Επίλυση Ασκήσεων Μαθήματος

Θεωρητική Φυσική

Ασκήσεις 21, 22, 25



Ονοματεπώνυμο: Αναστάσιος Μπατατέγας
Αριθμός Μητρώου: 09121431
Εξάμηνο: $9^{ο}$
Σχολή: ΕΜΦΕ
Email: tasosmntdew@gmail.com , ge21431@mail.ntua.gr
Διδάσκων: Ν. Τράκας

Άσκηση 21

Δείξτε ότι στην μη – σχετικιστική προσέγγιση η εξίσωση του Dirac, παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^{\mu} = (V, \mathbf{A})$, ανάγεται στην *εξίσωση του Pauli*:

$$(E + eV - m)\psi_A = \left[\frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right]\psi_A$$

όπου το μαγνητικό πεδίο, $\mathbf{B}$, σε σχέση με το διανυσματικό δυναμικό, $\mathbf{A}$, δίνεται από την γνωστή σχέση $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$, και υποθέτουμε ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι ασθενές σε σχέση με την ενέργεια του ηλεκτρονίου, δηλ. ισχύει $|eV| \ll m$.

Λύση

Προς επίλυση του προβλήματος, ακολουθούμε την ανάλυση και τον συμβολισμό των Σημειώσεων καθώς και του βιβλίου «*Quarks & Leptons* – F. Halzen, A. D. Martin». Για ελεύθερο σωματίδιο, οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της ορμής στην αναπαράσταση θέσης έχουν την μορφή του συνήθους πυρήνα ενός κυματοπακέτου:

$$\psi_{\text{free particle}} \equiv u(\not{p})\, e^{-i\not{p}\cdot x} \tag{21.1}$$

όπου $u(\not{p})$ είναι ένας spinor διάστασης 4 που εξαρτάται μόνο από την τετρα-ορμή $\not{p}$ του σωματιδίου (x είναι το τετράνυσμα θέσης του σωματιδίου). Γράφοντας την εξίσωση Dirac για τις ιδιοτιμές ενέργειας:

$$H\psi \equiv (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m)\psi = E\psi \tag{21.2}$$

όπου για τους 4×4 πίνακες $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta$ χρησιμοποιείται η αναπαράσταση Dirac – Pauli:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I_{2\times 2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I_{2\times 2}} \end{pmatrix} \tag{21.3a}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{21.3b}$$

και αντικαθιστώντας την μορφή (21.1), λαμβάνουμε το σύστημα εξισώσεων:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\, u_B = (E - m)u_A \tag{21.4a}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\, u_A = (E + m)u_B \tag{21.4b}$$

όπου έχουμε διαχωρίσει τους spinors $u(\not{p})$ ως:

$$u(\not{p}) \coloneqq \begin{pmatrix} u_A(\not{p}) \\ u_B(\not{p}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \tag{21.5}$$

Ουσιαστικά, ο χώρος των spinors $u(\not{p})$, διάστασης 4, διαχωρίζεται στο ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων του, διάστασης 2, σε καθέναν από τους οποίους ανήκουν τα u_A, u_B. Για μετέπειτα αναφορά, συμβολίζουμε αυτούς τους γραμμικούς χώρους ως $u \in \mathcal{S}$, $u_A \in \mathcal{S}_A$ και $u_B \in \mathcal{S}_B$, με $\dim\mathcal{S} = 4$, $\dim\mathcal{S}_A = \dim\mathcal{S}_B = 2$, και:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_A \oplus \mathcal{S}_B$$

Σημειώνεται ότι ο $\mathcal{S}$ αποτελεί γραμμικό χώρο επί του $\mathbb{C}$, εξαιτίας της γραμμικότητας του συστήματος (18.4), η οποία ανάγεται στην γραμμικότητα της εξίσωσης Dirac, (21.2). Θεωρούμε γνωστή την *πλήρη* και *ορθοκανονική* βάση των ιδιοκαταστάσεων ελεύθερου σωματιδίου, (21.1), της εξίσωσης Dirac (21.2):

$$\psi_{+}^{(s)}(x,p) \equiv u^{(s)}\, e^{-ip\cdot x} \equiv N\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x} \quad , \; s\in\{1,2\}\,, \qquad E = E_{+} > 0 \; (21.6a)$$

$$\psi_{-}^{(s)}(x,p) \equiv u^{(s+2)}\, e^{-ip\cdot x} = N\begin{pmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} e^{-ip\cdot x}\,, \; s\in\{1,2\}\,, \qquad E = E_{-} < 0 \; (21.6b)$$

όπου οι δύο πρώτες ιδιοσυναρτήσεις αντιστοιχούν σε σωματίδιο θετικής ενέργειας ($E = E_{+} > 0$), ενώ οι δύο τελευταίες σε σωματίδιο αρνητικής ενέργειας ($E = E_{-} < 0$), με $E_{\pm} = \pm\sqrt{p^2+m^2}$, και κατά τα γνωστά:

$$\chi^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \chi^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{21.7}$$

Στην μη – σχετικιστική προσέγγιση, $\beta \equiv \upsilon/c \ll 1$, είναι $E + m \approx 2m$, ενώ, δεδομένου ότι σε αυτή την περίπτωση $\mathbf{p} \approx m\boldsymbol{\beta}$, για την αναπαράσταση Dirac – Pauli έχουμε:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \equiv \sigma_1 p_x + \sigma_2 p_y + \sigma_3 p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \approx m\beta \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}$$

και η σχέση $(21.4b)$ συνεπάγεται ότι:

$$u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}u_A \approx \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} u_A \overset{(21.6a,b)}{\approx} \beta u_A \tag{21.8}$$

Επομένως, στο μη – σχετικιστικό όριο, και για κάθε spinor $\psi = (\psi_A \quad \psi_B)^T \in \mathcal{S}$ της εξίσωσης Dirac, ο spinor θετικής ενέργειας του υπόχωρου $\mathcal{S}_A$, $\psi_A \in \mathcal{S}_A$, είναι μεγαλύτερος του spinor αρνητικής ενέργειας του υπόχωρου $\mathcal{S}_B$, $\psi_B \in \mathcal{S}_B$, κατά έναν παράγοντα $\beta \equiv \upsilon/c$, δηλαδή:

$$\psi_B \approx \beta\psi_A\,, \qquad \forall\, \psi_A \in \mathcal{S}_A\,, \psi_B \in \mathcal{S}_B\,, \qquad \beta \equiv \upsilon/c \ll 1 \tag{21.9}$$

Ισοδύναμα, *στο μη – σχετικιστικό όριο, οι spinors Dirac έχουν πρακτικά αμελητέα προβολή στον υπόχωρο $\mathcal{S}_B$ των spinors αρνητικής ενέργειας, και κατ' επέκταση, μπορεί να ειπωθεί ότι ο «αντι – σωματιδιακός» χαρακτήρας των spinors εξασθενεί*. Βεβαίως, ο αντίστοιχος «σωματιδιακός» χαρακτήρας, στον οποίο αντιστοιχεί η προβολή $\psi_A \in \mathcal{S}_A$ αποτελεί υπόθεση σύμβασης, ήτοι της επιλογής του *σωματιδίου* που αντιστοιχεί σε ενέργειες $E_{+} > 0$.

Θεωρούμε σε αυτό το σημείο την περίπτωση ενός μη – σχετικιστικού ηλεκτρονίου e^{-}, ταχύτητας $\beta = \upsilon/c \ll 1$, παρουσία ενός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^{\mu} = (V, \mathbf{A})$, το οποίο είναι ασθενές σε σχέση με την ενέργεια του ηλεκτρονίου, $|eV| \ll m$. Το πεδίο μελετάται ως ένα εξωτερικό αίτιο αλληλεπίδρασης, και θεωρείται ότι δεν παράγεται από το κινούμενο ηλεκτρόνιο.

Από την Αναλυτική Δυναμική, η κανονική ορμή που υπεισέρχεται στην Hamiltonian του συστήματος ηλεκτρονίου – πεδίου τροποποιείται, σε σχέση με την μηχανική ορμή, $m\mathbf{v}$, σύμφωνα με την γνωστή σχέση $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + e\mathbf{A}$, επομένως η κβάντωση του συστήματος απαιτεί την αντικατάσταση του τελεστή $\mathscr{p}^{\mu}$ από τον τελεστή:

$$\mathscr{p}^{\mu} = (E, \mathbf{p}) \to \mathscr{p}^{\mu} + eA^{\mu} = (E + eV, \mathbf{p} + e\mathbf{A}) \tag{21.9}$$

όπου $E \equiv i\partial_t$, $\mathbf{p} \equiv -i\boldsymbol{\nabla}$ είναι οι τελεστές ενέργειας και ορμής, αντιστοίχως. Αντικαθιστώντας την (21.9) στο σύστημα της εξίσωσης Dirac (21.4) λαμβάνουμε ότι:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\, u_B = (E + eV - m)u_A \tag{21.10a}$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\, u_A = (E + eV + m)u_B \tag{21.10b}$$

Αντικατάσταση του u_B από την $(21.10b)$ στην $(21.10a)$ αποδίδει την σχέση:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})\, u_A = (E + eV + m)(E + eV - m)u_A \tag{21.11}$$

Ο τελεστής στο αριστερό μέλος της τελευταίας σχέσης, γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + e\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) \\ &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^{\mathbf{2}} + e(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) + e(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) + e^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})^2 \\ &= \mathbf{p^2 I_{2\times 2}} + e(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) + e(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) + e^2\mathbf{A^2 I_{2\times 2}}\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα αξιοποιήθηκε η γνωστή σχέση των πινάκων του Pauli:

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})^2 \equiv (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a^2} \cdot \mathbf{I}_{2\times 2}\,, \qquad \forall\, \mathbf{a} = \left(\mathrm{a_x}, \mathrm{a_y}, \mathrm{a_z}\right) \in \mathbb{C}^{\mathbf{3\times 1}} \tag{21.12}$$

Για τους τελεστές $e(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})$, $e(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})$ εκτελούμε τις πράξεις σύμφωνα πάντοτε με την σχέση των πινάκων Pauli:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_z & \mathrm{a}_x - i\mathrm{a}_y \\ \mathrm{a}_x + i\mathrm{a}_y & -\mathrm{a}_z \end{pmatrix}, \qquad \forall\, \mathbf{a} = \left(\mathrm{a_x}, \mathrm{a_y}, \mathrm{a_z}\right) \in \mathbb{C}^{\mathbf{3\times 1}} \tag{21.13}$$

Υπολογίζουμε, σύμφωνα με την (21.13), και εκτελώντας απλές πράξεις πινάκων:

$$\begin{aligned} e(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) &= e\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_z & A_x - iA_y \\ A_x + iA_y & -A_z \end{pmatrix} \\ &= e\begin{pmatrix} p_zA_z + (p_x - ip_y)(A_x + iA_y) & p_z(A_x - iA_y) - (p_x - ip_y)A_z \\ (p_x + ip_y)A_z - (A_x + iA_y)p_z & (p_x + ip_y)(A_x - iA_y) + p_zA_z \end{pmatrix} \\ &= e\begin{pmatrix} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + i(p_xA_y - p_yA_x) & (p_zA_x - p_xA_z) + i(p_yA_z - A_yp_z) \\ (p_xA_z - A_xp_z) + i(p_yA_z - p_zA_y) & \mathbf{p} \cdot \mathbf{A} - i(p_xA_y - p_yA_x) \end{pmatrix} \\ &= e(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})\mathbf{I_{2\times 2}} + ie\begin{pmatrix} (\mathbf{p} \times \mathbf{A})_z & (\mathbf{p} \times \mathbf{A})_x - i(\mathbf{p} \times \mathbf{A})_y \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{A})_x + i(\mathbf{p} \times \mathbf{A})_y & -(\mathbf{p} \times \mathbf{A})_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\overset{(21.13)}{\Longrightarrow} e(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) = e(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})\mathbf{I_{2\times 2}} + ie\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A})$$

όπου έχει αξιοποιηθεί ο συμβολισμός $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} \equiv p_xA_x + p_yA_y + p_zA_z$ και ο αντίστοιχος προφανής για το $\mathbf{p} \times \mathbf{A}$, όπως προκύπτει από την διανυσματική ανάλυση. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των $\mathbf{p}$ και $\mathbf{A}$ στην εξίσωση $(21.14a)$ λαμβάνουμε την αντίστοιχη σχέση για τον τελεστή $e(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})$, και συνοψίζουμε τις δύο σχέσεις:

$$e(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}) = e(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})\mathbf{I_{2\times 2}} + ie\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{A}) \qquad (21.14a)$$

$$e(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}) = e(\mathbf{A}\cdot\mathbf{p})\mathbf{I_{2\times 2}} - ie\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{p}) \qquad (21.14b)$$

όπου το πρόσημο «−» εισάγεται λόγω του ότι η εναλλαγή σειράς των τελεστών $e(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})$, $e(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})$ αλλάζει τα πρόσημα των μιγαδικών μονάδων i στις εκφράσεις των γινομένων που αποτελούν τις συνιστώσες του τελεστή εξωτερικού γινομένου $\mathbf{A}\times\mathbf{p}$. Βάσει των παραπάνω σχέσεων, ο τελεστής του αριστερού μέλους της σχέσης (21.11) γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A}) &= \mathbf{p^2 I_{2\times 2}} + e(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A}) + e(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{A})\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}) + e^2\mathbf{A^2 I_{2\times 2}} \\ &= \mathbf{p^2 I_{2\times 2}} + e(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})\mathbf{I_{2\times 2}} + ie\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}\times\mathbf{A}) + e(\mathbf{A}\cdot\mathbf{p})\mathbf{I_{2\times 2}} - ie\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{p}) + e^2\mathbf{A^2 I_{2\times 2}} \\ &= \{\mathbf{p^2 I_{2\times 2}} + e(\mathbf{p}\cdot\mathbf{A})\mathbf{I_{2\times 2}} + e(\mathbf{A}\cdot\mathbf{p})\mathbf{I_{2\times 2}} + e^2\mathbf{A^2 I_{2\times 2}}\} + ie\boldsymbol{\sigma}\cdot\{(\mathbf{p}\times\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\times\mathbf{p})\}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A}) = (\mathbf{p}+e\mathbf{A})^2\mathbf{I_{2\times 2}} + ie\boldsymbol{\sigma}\cdot\{(\mathbf{p}\times\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\times\mathbf{p})\} \qquad (21.15)$$

Δεδομένου ότι $\mathbf{p}\equiv -i\boldsymbol{\nabla}$ ο τελεστής στην αγκύλη της παραπάνω σχέσης ισούται με:

$$(\mathbf{p}\times\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\times\mathbf{p}) = -i\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A} \equiv -i\mathbf{B} \qquad (21.16)$$

η απόδειξη της οποίας προκύπτει εύκολα αναπτύσσοντας του τελεστές και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας όπου χρειάζεται. Σημειώνεται ότι στην σχέση (21.16), ο τελεστής $\mathbf{B}\equiv\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$ δίνεται από αυτή την σχέση λόγω της κβάντωσης της αντίστοιχης σχέσης του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού. Επομένως, το αριστερό μέλος της σχέσης (21.11) γράφεται, τελικά, ως:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}+e\mathbf{A}) = (\mathbf{p}+e\mathbf{A})^2\mathbf{I_{2\times 2}} + e\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B} \qquad (21.17)$$

Για το δεξί μέλος της σχέσης (21.11), στο μη – σχετικιστικό όριο, όπου $E\approx m$, και δεδομένης της προσέγγισης ασθενούς πεδίου, $|eV|\ll m$, έχουμε ότι:

$$(E+eV+m)(E+eV-m) \approx 2m(E+eV-m) \qquad (21.18)$$

όπου πραγματοποιείται η προσέγγιση $E+eV+m\approx m+0+m$, η οποία *δεν* μπορεί να πραγματοποιηθεί και για τον δεύτερο όρο, καθώς τα E, m έχουν πεπερασμένη διαφορά, πιθανόν συγκρίσιμη με τον όρο eV. Από τις σχέσεις (21.17) και (21.18), η σχέση του Dirac (21.11), στο μη – σχετικιστικό όριο, ανάγεται, για κάθε πυρήνα κυματοπακέτου $u(p)$, αλλά κατ΄επέκταση και για κάθε κατάσταση ελεύθερου σωματιδίου $\psi = u(p)\,e^{-ip\cdot x} \equiv (\psi_A \quad \psi_B)^T \in \mathcal{S}$, στην σχέση:

$$[(\mathbf{p}+e\mathbf{A})^2\mathbf{I_{2\times 2}} + e\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}]\psi_A = 2m(E+eV-m)\psi_A \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p}+e\mathbf{A})^2\mathbf{I_{2\times 2}} + \frac{e}{2m}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right]\psi_A = (E+eV-m)\psi_A\,, \qquad \forall\,\psi_A\in\mathcal{S}_A} \qquad (21.19)$$

που είναι η ζητούμενη *εξίσωση Schrödinger – Pauli*, η οποία αποδεικνύει ότι σε πλαίσιο μη – σχετικιστικό (άρα και σε κάθε πλαίσιο), κάθε e^- χαρακτηρίζεται από έναν εσωτερικό βαθμό ελευθερίας, τύπου στροφορμής, – το spin – ο οποίος διαχωρίζει τις ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις του. ■

Άσκηση 22

Δείξτε ότι στην συγκεκριμένη αναπαράσταση των γ πινάκων, $\gamma^{\mu} = (\beta, \beta\boldsymbol{\alpha})$, που επάγεται από την αναπαράσταση Dirac – Pauli των πινάκων $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και β:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I_{2\times 2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I_{2\times 2}} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ο καθορισμός του τελεστή συζυγίας φορτίου (charge conjugation operator), C, μέσω της ακόλουθης μορφής:

$$C\gamma^0 \coloneqq i\gamma^2 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & -1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

πληροί την συνθήκη:

$$-(C\gamma^0)\gamma^{\mu *} = \gamma^{\mu}(C\gamma^0)$$

η οποία επιτρέπει την γραφή της εξίσωσης Dirac για το ποζιτρόνιο, παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, σε ίδια μορφή με την αντίστοιχη εξίσωση Dirac για το ηλεκτρόνιο, παρουσία ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Λύση

Προς επίλυση του προβλήματος, ακολουθούμε την ανάλυση και τον συμβολισμό των Σημειώσεων καθώς και του βιβλίου «*Quarks & Leptons* – F. Halzen, A. D. Martin». Επιλέγοντας την μορφή $C\gamma^0 \coloneqq i\gamma^2 \equiv i\beta\alpha_2$, ελέγχουμε την ισχύ της απαιτούμενης συνθήκης για κάθε τιμή του $\mu \in \{0,1,2,3\}$. Θα αξιοποιηθούν τόσο οι αναλυτικές μορφές των πινάκων $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και β στην δεδομένη αναπαράσταση Dirac – Pauli, όσο και οι σχέσεις ορισμού:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \{\alpha_i, \beta\} = \mathbf{0} \tag{22.1}$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbf{0} \tag{22.2}$$

Σημειώνουμε, επίσης, ότι στην αναπαράσταση Dirac – Pauli ισχύουν οι εξής σχέσεις μιγαδικής συζυγίας πινάκων:

$$\begin{cases} \beta^* = \begin{pmatrix} \mathbf{I_{2\times 2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I_{2\times 2}} \end{pmatrix}^* \equiv \beta, \qquad \alpha_1^* \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_1^* \\ \sigma_1^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} \equiv \alpha_1, \qquad \alpha_3^* = \alpha_3 \\ \alpha_2^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_2^* \\ \sigma_2^* & \mathbf{0} \end{pmatrix} \equiv -\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \equiv -\alpha_2 \end{cases}$$

Έχουμε τους ακόλουθους υπολογισμούς:

- $\boxed{\mu = 0}$:

$$-(C\gamma^0)\gamma^{0*} = -i\gamma^2\beta^* \equiv -i\beta\alpha_2\beta \overset{(22.1)}{=} +i\alpha_2\beta^2 \overset{(22.2)}{=} i\alpha_2$$

$$\gamma^0(C\gamma^0) = \beta i\gamma^2 = i\beta\beta\alpha_2 \overset{(22.2)}{=} i\alpha_2$$

$$\therefore\ -(C\gamma^0)\gamma^{0*} = \gamma^0(C\gamma^0) \equiv i\alpha_2 \tag{22.3}$$

- $\boxed{\mu = 1}$:

$$-(C\gamma^0)\gamma^{1*} = -i\gamma^2(\beta\alpha_1)^* \equiv -i\beta\alpha_2\beta^*\alpha_1^* \equiv -i\beta\alpha_2\beta\alpha_1 \overset{(22.1)}{=} +i\beta^2\alpha_2\alpha_1 \overset{(22.2)}{=} i\alpha_2\alpha_1$$

$$\gamma^1(C\gamma^0) = \beta\alpha_1 i\gamma^2 = i\beta\alpha_1\beta\alpha_2 \overset{(22.1)}{=} -i\beta^2\alpha_1\alpha_2 \overset{(22.2)}{=} -i\alpha_1\alpha_2 \overset{(22.1)}{=} i\alpha_2\alpha_1$$

$$\therefore\ -(C\gamma^0)\gamma^{1*} = \gamma^1(C\gamma^0) \equiv i\alpha_2\alpha_1 \tag{22.4}$$

- $\boxed{\mu = 2}$:

$$-(C\gamma^0)\gamma^{2*} = -i\gamma^2(\beta\alpha_2)^* \equiv -i\beta\alpha_2\beta^*\alpha_2^* \equiv -i\beta\alpha_2\beta(-\alpha_2) \overset{(22.1)}{=} -i\beta^2\alpha_2^2 \overset{(22.2)}{=} -i$$

$$\gamma^2(C\gamma^0) = \beta\alpha_2 i\gamma^2 = i\beta\alpha_2\beta\alpha_2 \overset{(22.1)}{=} -i\beta^2\alpha_2^2 \overset{(22.2)}{=} -i$$

$$\therefore\ -(C\gamma^0)\gamma^{2*} = \gamma^2(C\gamma^0) \equiv -i \tag{22.5}$$

- $\boxed{\mu = 3}$:

$$-(C\gamma^0)\gamma^{3*} = -i\gamma^2(\beta\alpha_3)^* \equiv -i\beta\alpha_2\beta^*\alpha_3^* \equiv -i\beta\alpha_2\beta\alpha_3 \overset{(22.1)}{=} +i\beta^2\alpha_2\alpha_3 \overset{(22.2)}{=} i\alpha_2\alpha_3$$

$$\gamma^3(C\gamma^0) = \beta\alpha_3 i\gamma^2 = i\beta\alpha_3\beta\alpha_2 \overset{(22.1)}{=} -i\beta^2\alpha_3\alpha_2 \overset{(22.2)}{=} -i\alpha_3\alpha_2 \overset{(22.1)}{=} i\alpha_2\alpha_3$$

$$\therefore\ -(C\gamma^0)\gamma^{3*} = \gamma^3(C\gamma^0) \equiv i\alpha_2\alpha_3 \tag{22.6}$$

Από τις σχέσεις (22.3) - (22.6), έπεται αμέσως ότι:

$$\boxed{-(C\gamma^0)\gamma^{\mu*} = \gamma^\mu(C\gamma^0)\,,\forall\,\mu \in \{0,1,2,3\}} \tag{22.7}$$

που είναι το ζητούμενο αποτέλεσμα. ■

Άσκηση 25

Δείξτε ότι ισχύει η σχέση:

$$\not{p}\not{p} = p^2$$

όπου $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$, με γ^μ να είναι οι πίνακες γ της εξίσωσης Dirac σε κάποια δεδομένη αναπαράσταση, και p η τετρα-ορμή του ελεύθερου σωματιδίου.

Λύση

Προς επίλυση του προβλήματος, ακολουθούμε την ανάλυση και τον συμβολισμό των Σημειώσεων καθώς και του βιβλίου «*Quarks & Leptons* – F. Halzen, A. D. Martin». Έχουμε, εξ ορισμού, ότι:

$$\not{p}\not{p} \equiv \left(\gamma^\mu p_\mu\right)\left(\gamma^\nu p_\nu\right) = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu \tag{25.1}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι οι πίνακες γ μετατίθενται με τον *τελεστή* της τετρα-ορμής, καθώς είναι οι σταθεροί πίνακες «ανάμιξης» των συνιστωσών του εκάστοτε spinor. Από την άλγεβρα Clifford των πινάκων γ, γνωρίζουμε ότι:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \equiv 2g^{\mu\nu} \tag{25.2}$$

λόγω της οποίας, η σχέση (25.1) γίνεται:

$$\not{p}\not{p} = \gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu p_\mu p_\nu + 2g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \equiv -\gamma^\nu \gamma^\mu p_\nu p_\mu + 2p^2$$

όπου αξιοποιείται ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου του τετραδιανύσματος p συναρτήσει της μετρικής. Από την τελευταία με εναλλαγή των βουβών δεικτών μ, ν λαμβάνουμε ότι:

$$\not{p}\not{p} = -\not{p}\not{p} + 2p^2 \implies \boxed{\not{p}\not{p} = p^2} \tag{25.3}$$

από την οποία έπεται το ζητούμενο. ■