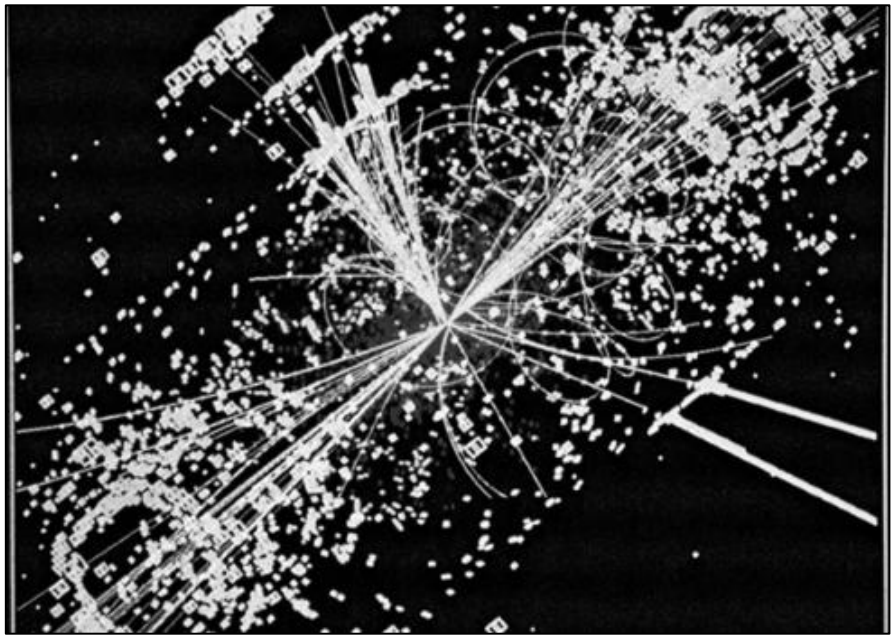
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, 2025 - 2026

Επίλυση Ασκήσεων Μαθήματος

Θεωρητική Φυσική

Άσκηση 29



Ονοματεπώνυμο: Αναστάσιος Μπατατέγας
Αριθμός Μητρώου: 09121431
Εξάμηνο: $9^{ο}$
Σχολή: ΕΜΦΕ
Email: tasosmntdew@gmail.com , ge21431@mail.ntua.gr
Διδάσκων: Ν. Τράκας

Άσκηση 29

Η εξίσωση Dirac για σχετικιστικό σωματίδιο μάζας m:

$$H\psi \equiv (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + \beta m)\psi\,,\ \ \psi \in \mathcal{S}$$

όπου $\mathcal{S}$ ο γραμμικός χώρος των spinors, με $\dim\mathcal{S} = 4$, και $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, β πίνακες διάστασης 4×4, μπορεί να λάβει την συναλλοίωτη μορφή:

$$(i\gamma\cdot\partial - m)\psi \equiv \left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0\,,\ \ \psi \in \mathcal{S}$$

ορίζοντας τους *πίνακες γ του Dirac*:

$$\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\boldsymbol{\alpha}),\ \ \mu = 0,1,2,3$$
$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

Οι πίνακες $\gamma^\mu, \mu = 0,1,2,3$ αποτελούν τους γεννήτορες μίας βάσης της *άλγεβρας Clifford*, συγκεκριμένα της $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$, υπό τον ισομορφισμό $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})\sim\mathbb{C}^{4\times4}$, με γραμμικό χώρο τον $\mathbb{C}$, τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και s-πολλαπλασιασμού, διάσταση $\dim \mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C}) = 16$, αλγεβρική πράξη την σύνθεση απεικονίσεων (δηλ. τον πολλαπλασιασμό πινάκων), και αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I$$

Οι πίνακες γ ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες ιχνών (οι οποίες απορρέουν από την αντίστοιχη άλγεβρα στην οποία ανήκουν):

i. $\mathrm{Tr}\{I\} = 4$, όπου I η μονάδα της $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$, δηλ. ο μοναδιαίος 4×4 πίνακας υπό τον ισομορφισμό $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})\sim\mathbb{C}^{4\times4}$.

ii. $\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\} = 0\,, \mu = 0,1,2,3\,,\ \mathrm{Tr}\{\text{γινόμενο περιττού αριθμού πινάκων }\gamma\} = 0$

iii. $\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu}$, $\mathrm{Tr}\{\not{a}\not{b}\} = 4a\cdot b\,, \forall\, a,b \in \mathcal{S}$

iv. $$\mathrm{Tr}\{\not{a}_1\not{a}_2\dots\not{a}_n\} = (a_1\cdot a_2)\mathrm{Tr}\{\not{a}_3\dots\not{a}_n\} - (a_1\cdot a_3)\mathrm{Tr}\{\not{a}_2\not{a}_4\dots\not{a}_n\} + \cdots$$
$$\dots + (a_1\cdot a_n)\mathrm{Tr}\{\not{a}_2\not{a}_3\dots\not{a}_{n-1}\}$$
$$= \sum_{r=2}^{n}(-1)^r\,(a_1\cdot a_r)\,\mathrm{Tr}\left\{\prod_{\substack{s=2\\ s\neq r}}^{n}\not{a}_s\right\},\ \ \forall\, \begin{matrix} a_1,\dots,a_n \in \mathcal{S} \\ n \in 2\cdot\mathbb{N}\end{matrix}$$

$$\mathrm{Tr}\{\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\} = 4[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)],\ \forall\, a,b,c,d \in \mathcal{S}$$

v. $\mathrm{Tr}\{\gamma^5\} = 0$

vi. $\mathrm{Tr}\{\gamma^5\not{a}\not{b}\} = 0$, $\mathrm{Tr}\{\gamma^5\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\} = 4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma\,,\ \forall\, a,b,c,d \in \mathcal{S}$

Σε όλες τις παραπάνω σχέσεις έχει αξιοποιηθεί ο συμβολισμός Feynman, $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$, $g^{\mu\nu}$ είναι ο μετρικός τανυστής Minkowski (σύμβαση $\mathrm{sgn}(g) \coloneqq -2$), $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ το αντισυμμετρικό σύμβολο εναλλαγής Levi – Civita, και οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες υποδηλώνουν άθροιση (σύμβαση Einstein). Ισχύουν και οι παρακάτω ιδιότητες:

vii. $\gamma_\mu\gamma^\mu = 4\,,\qquad \gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a}\,,$

$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4a\cdot b\,,\quad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}\,,\ \forall\, a,b,c \in \mathcal{S}$

Λύση

Προς επίλυση του προβλήματος, ακολουθούμε την ανάλυση και τον συμβολισμό των Σημειώσεων καθώς και του βιβλίου «*Quarks & Leptons* – F. Halzen, A. D. Martin». Για την απόδειξη των παραπάνω ιδιοτήτων, τα στοιχεία γ της αντίστοιχης άλγεβρας Clifford αντιμετωπίζονται, υπό τον ισομορφισμό $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})\sim\mathbb{C}^{4\times4}$, ως πίνακες 4×4, οι οποίοι πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους, ικανοποιώντας τις σχέσεις – ορισμούς:

$$\gamma^{\mu}\equiv(\beta,\beta\boldsymbol{\alpha}),\ \ \mu=0,1,2,3\,,\qquad \gamma^{5}\equiv i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} \tag{29.1}$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}=2g^{\mu\nu}I\,,\qquad \mu=0,1,2,3 \tag{29.2}$$

$$\gamma^{\mu\dagger}=\gamma^{0}\gamma^{\mu}\gamma^{0}\,,\qquad \mu=0,1,2,3 \tag{29.3}$$

$$(\gamma^{0})^{2}=I\,,\qquad (\gamma^{k})^{2}=-I\,,\ \ k=1,2,3\ ,\qquad (\gamma^{5})^{2}=I \tag{29.4}$$

$$\gamma^{5}\gamma^{\mu}=-\gamma^{\mu}\gamma^{5}\,,\qquad \mu=0,1,2,3 \tag{29.5}$$

όπου $\boldsymbol{\alpha}\equiv(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, β οι πίνακες της Hamiltonian του Dirac, που υπενθυμίζεται ότι ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες (οι οποίες προκύπτουν αφενός από γραμμικοποίηση της Hamiltonian ως προς τον χρόνο, αφετέρου από την εμφάνιση των πινάκων στον τελεστή της Hamiltonian, ο οποίος είναι Ερμιτιανός):

$$\{\alpha_i,\alpha_j\}=\{\alpha_i,\beta\}=0\,,\qquad \forall\, i,j\in\{1,2,3\} \tag{29.6a}$$

$$\alpha_i^{2}=\beta^{2}=1\,,\qquad \forall\, i\in\{1,2,3\} \tag{29.6b}$$

$$\alpha_i^{\dagger}=\alpha_i\,,\ \ \beta^{\dagger}=\beta\,,\qquad \forall\, i\in\{1,2,3\} \tag{29.6c}$$

$$\mathrm{Tr}\{\alpha_i\}=\mathrm{Tr}\{\beta\}=0\,,\qquad \forall\, i\in\{1,2,3\} \tag{29.6d}$$

όπου $\{a,b\}\equiv ab-ba$ ο αντιμεταθέτης τυχόντων τελεστών – πινάκων a και b. Επιπλέον, σημειώνουμε τις παρακάτω ιδιότητες για τα ίχνη πινάκων του $\mathbb{C}^{4\times4}$ οι οποίες θεωρούνται γνωστές από την βασική Γραμμική Άλγεβρα:

$$\mathrm{Tr}\{A+B\}=\mathrm{Tr}\{A\}+\mathrm{Tr}\{B\}\,,\ \ \mathrm{Tr}\{cA\}=c\mathrm{Tr}\{A\}\,,\qquad \forall\, A,B\in\mathbb{C}^{4\times4}\,,c\in\mathbb{C} \tag{29.7a}$$

$$\mathrm{Tr}\{A\}=\mathrm{Tr}\{A^{T}\}\,,\qquad \forall\, A,B\in\mathbb{C}^{4\times4} \tag{29.7b}$$

$$\mathrm{Tr}\{A^{\dagger}\}=(\mathrm{Tr}\{A\})^{*}\,,\qquad \mathrm{Tr}\{A\}=(\mathrm{Tr}\{A^{\dagger}\})^{*}\,,\qquad \forall\, A\in\mathbb{C}^{4\times4} \tag{29.7c}$$

$$\mathrm{Tr}\{AB\}=\mathrm{Tr}\{BA\}=\mathrm{Tr}\{A^{T}B\}=\mathrm{Tr}\{B^{T}A\}\,,\qquad \forall\, A,B\in\mathbb{C}^{4\times4} \tag{29.7d}$$

$$\mathrm{Tr}\{ABCD\}=\mathrm{Tr}\{BCDA\}=\mathrm{Tr}\{CDAB\}=\mathrm{Tr}\{DABC\}\,,\ \ \forall\, A,B,C,D\in\mathbb{C}^{4\times4} \tag{29.7e}$$

Βάσει των παραπάνω σχέσεων, ξεκινάμε τις αποδείξεις των ζητούμενων ιδιοτήτων.

i. Άμεσα, υπό τον παραπάνω ισομορφισμό $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})\sim\mathbb{C}^{4\times4}$, λαμβάνουμε:

$$\mathrm{Tr}\{I\}\ \overset{\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})\sim\mathbb{C}^{4\times4}}{\widehat{=}}\ \mathrm{Tr}\left\{\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&1\end{pmatrix}_{4\times4}\right\}=4\ \Leftrightarrow\ \boxed{\mathrm{Tr}\{I\}=4} \tag{29.8}$$

ii. Από τις (29.4), (29.5) λαμβάνουμε τις εξής ισότητες:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\} \overset{(29.4)}{=} \mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\} \overset{(29.5)}{=} \mathrm{Tr}\{-\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\} \overset{(29.7a)}{=} -\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^5\}$$
$$\overset{(29.7e)}{=} -\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^5\gamma^\mu\} \overset{(29.4)}{=} -\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\}, \qquad \forall\, \mu = 0,1,2,3$$

Επομένως, προκύπτει η ζητούμενη σχέση:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\} = 0\,,\ \ \mu = 0,1,2,3} \tag{29.9}$$

Με όμοιο τρόπο, παρεμβάλλοντας το τετράγωνο του πίνακα γ^5 εντός του εκάστοτε ίχνους, μπορεί να δειχθεί και η γενικότερη ιδιότητα. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα σύνολο περιττού αριθμού δεικτών $\{\mu_j \in \{0,1,2,3\} \mid j \in \{1,2,\dots,2\rho+1\}\,,\ \rho \in \mathbb{N}\}$ και υπολογίζουμε το ίχνος:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2\rho+1}}\} \overset{(29.4)}{=} \mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2\rho+1}}\} \overset{(29.7e)}{=} \mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2\rho+1}}\gamma^5\}$$
$$\overset{(29.5)}{=} -\,\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2\rho}}\gamma^5\gamma^{\mu_{2\rho+1}}\}$$
$$\overset{(29.5)}{=} (-1)^2\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2\rho-1}}\gamma^5\gamma^{\mu_{2\rho}}\gamma^{\mu_{2\rho+1}}\}$$
$$\overset{(29.5)}{=} (-1)^3\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2\rho-2}}\gamma^5\gamma^{\mu_{2\rho-1}}\gamma^{\mu_{2\rho}}\gamma^{\mu_{2\rho+1}}\} = \cdots$$
$$\dots \overset{(29.5)}{=} (-1)^{2\rho+1}\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2\rho+1}}\}$$
$$\overset{(29.4)}{=} -\,\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2\rho+1}}\}$$

Επομένως, προκύπτει ότι ισχύει:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2\rho+1}}\} = 0\,,\ \ \forall\,\{\mu_j \in \{0,1,2,3\} \mid j \in \{1,2,\dots,2\rho+1\}\,,\rho \in \mathbb{N}\}} \tag{29.10}$$

δηλαδή, με άλλα λόγια, και πιο διαισθητικά:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\{\text{γινόμενο περιττού αριθμού πινάκων } \gamma\} = 0}$$

όπου σημειώνεται ότι με την (κάπως ασαφή) φράση «πίνακες γ» εννοούνται μόνον οι πίνακες γ^μ, $\mu \in \{0,1,2,3\}$.

iii. Από την αντιμεταθετική σχέση (29.2), λαμβάνοντας το ίχνος και των δύο μελών, έχουμε:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\} = \mathrm{Tr}\{2g^{\mu\nu}I\}$$
$$\overset{(29.7a)}{\Leftrightarrow} \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} + \mathrm{Tr}\{\gamma^\nu\gamma^\mu\} = 2g^{\mu\nu}\mathrm{Tr}\{I\} \overset{(i)}{=} 8g^{\mu\nu}$$
$$\overset{(29.7d)}{\Leftrightarrow} 2\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 8g^{\mu\nu} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Tr}\{\gamma^\mu\gamma^\nu\} = 4g^{\mu\nu}\,, \forall\,\mu,\nu = 0,1,2,3} \tag{29.11}$$

όπου αξίζει να σημειωθεί ότι στην σχέση (29.2) τα στοιχεία των γινομένων του αριστερού μέλους είναι πίνακες (τελεστές), ενώ στο δεξί μέλος ο πίνακας είναι ο μοναδιαίος, I, ενώ το στοιχείο $g^{\mu\nu}$ είναι (για κάθε τιμή των μ, ν) ένας αριθμός. Για τον λόγο αυτό μπορεί να εξέλθει από το ίχνος στην δεύτερη γραμμή της παραπάνω αλυσίδας ισοδυναμιών.

Για την δεύτερη σχέση, παρατηρούμε ότι για τυχόντες spinors $a, b \in \mathcal{S}$ είναι:

$$\mathrm{Tr}\{\not{a}\not{b}\} \equiv \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu\} = \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu a_\mu b_\nu\} \overset{(29.7a)}{\triangleq} \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} a_\mu b_\nu$$
$$\overset{(29.11)}{\triangleq} 4g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \equiv 4a^\nu b_\nu \equiv 4\, a \cdot b \iff$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}\{\not{a}\not{b}\} = 4a \cdot b\,, \quad \forall\, a, b \in \mathcal{S}} \tag{29.12}$$

όπου τονίζεται ότι στην τρίτη ισότητα οι όροι $a_\mu b_\nu$ εξέρχονται από το ίχνος ως σταθεροί αριθμοί (για κάθε τιμή των μ, ν οι οποίες αθροίζονται), και για τον ίδιο λόγο μπορεί να πραγματοποιηθεί εναλλαγή των a_μ και γ^ν στην δεύτερη ισότητα. Επί της ουσίας, η υπαινισσόμενη άθροιση εντός του ίχνους, διασπάται σε άθροιση των ιχνών των επί μέρους προσθετέων πινάκων, σύμφωνα με την $(29.7a)$.

iv. Θεωρούμε τυχόντες spinors $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{S}$, όπου $n \in 2 \cdot \mathbb{N}$, δηλ. $n = 2\rho$, $\rho \in \mathbb{N}$ και θεωρώντας ένα σύνολο δεικτών $\{\mu_j \in \{0,1,2,3\} \mid j \in \{1,2,\dots,2\rho\}\,, \rho \in \mathbb{N}\,, n \equiv 2\rho\}$ υπολογίζουμε:

$$\mathrm{Tr}\{\not{a}_1 \not{a}_2 \dots \not{a}_n\} \equiv \mathrm{Tr}\left\{\gamma^{\mu_1} a_{1\mu_1} \gamma^{\mu_2} a_{2\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}} a_{2\rho\mu_{2\rho}}\right\}$$
$$\overset{(29.7a)}{\triangleq} \left(\prod_{j=1}^{2\rho} a_{j\mu_j}\right) \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} \tag{29.13}$$

Το ίχνος της τελευταίας σχέσης υπολογίζεται αξιοποιώντας αλλεπάλληλα την αντιμεταθετική σχέση (29.2), λαμβάνοντας επαγωγικά ότι:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} \overset{(29.2)}{\triangleq} \mathrm{Tr}\{(2g^{\mu_1\mu_2} I - \gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1})\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\}$$
$$\overset{(29.7a)}{\triangleq} 2g^{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} - \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\}$$
$$\overset{(29.2)}{\triangleq} 2g^{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_3} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} - \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}(2g^{\mu_1\mu_3} I - \gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_1})\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\}$$
$$\overset{(29.7a)}{\triangleq} 2g^{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} - 2g^{\mu_1\mu_3}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} + \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\}$$
$$\overset{(29.7a)}{\triangleq} 2g^{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} - 2g^{\mu_1\mu_3}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} + \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\}$$
$$\overset{(29.2)}{\triangleq} 2g^{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} - 2g^{\mu_1\mu_3}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} +$$
$$+\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}(2g^{\mu_1\mu_4} I - \gamma^{\mu_4}\gamma^{\mu_1})\gamma^{\mu_5} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\}$$
$$\overset{(29.7a)}{\triangleq} 2g^{\mu_1\mu_2}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} - 2g^{\mu_1\mu_3}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_4} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\}$$
$$+2g^{\mu_1\mu_4}\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_5} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\} - \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_5} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\}$$
$$= \dots = \sum_{r=2}^{2\rho-1} (-1)^r 2g^{\mu_1\mu_r}\mathrm{Tr}\left\{\prod_{\substack{s=2 \\ s\neq r}}^{2\rho} \gamma^{\mu_s}\right\} + \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}\gamma^{\mu_5} \dots \gamma^{\mu_{2\rho-1}}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_{2\rho}}\}$$
$$\overset{(29.2)}{\triangleq} \dots = \sum_{r=2}^{2\rho} (-1)^r 2g^{\mu_1\mu_r}\mathrm{Tr}\left\{\prod_{\substack{s=2 \\ s\neq r}}^{2\rho} \gamma^{\mu_s}\right\} - \underbrace{\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}\gamma^{\mu_5} \dots \gamma^{\mu_{2\rho-1}}\gamma^{\mu_{2\rho}}\gamma^{\mu_1}\}}_{\overset{(29.7e)}{\triangleq} \mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_{2\rho}}\}}$$

Επομένως, λαμβάνουμε ότι:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\{\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2\rho}}\} = \sum_{r=2}^{2\rho}(-1)^r g^{\mu_1\mu_r}\mathrm{Tr}\left\{\prod_{\substack{s=2\\ s\neq r}}^{2\rho}\gamma^{\mu_s}\right\}} \qquad (29.14)$$

και η σχέση (29.13) συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\not{a}_1\not{a}_2\dots\not{a}_n\} &= \left(\prod_{j=1}^{2\rho}a_{j\mu_j}\right)\sum_{r=2}^{2\rho}(-1)^r g^{\mu_1\mu_r}\mathrm{Tr}\left\{\prod_{\substack{s=2\\ s\neq r}}^{2\rho}\gamma^{\mu_s}\right\}\\ &= \prod_{j=1}^{2\rho}\sum_{r=2}^{2\rho}(-1)^r\, a_{j\mu_j}g^{\mu_1\mu_r}\mathrm{Tr}\left\{\prod_{\substack{s=2\\ s\neq r}}^{2\rho}\gamma^{\mu_s}\right\}\\ &\overset{(29.7a)}{=} \sum_{r=2}^{2\rho}(-1)^r\, g^{\mu_1\mu_r}a_{1\mu_1}a_{r\mu_r}\mathrm{Tr}\left\{\prod_{\substack{j=2\\ j\neq r}}^{2\rho}\prod_{\substack{s=2\\ s\neq r}}^{2\rho}\gamma^{\mu_s}\,a_{j\mu_j}\right\}\\ &\equiv \sum_{r=2}^{2\rho}(-1)^r\,(a_1\cdot a_r)\mathrm{Tr}\left\{\prod_{\substack{s=2\\ s\neq r}}^{2\rho}\not{a}_s\right\} \overset{n\equiv 2\rho}{\Leftrightarrow}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boxed{\mathrm{Tr}\{\not{a}_1\not{a}_2\dots\not{a}_n\} = \sum_{r=2}^{n}(-1)^r\,(a_1\cdot a_r)\,\mathrm{Tr}\left\{\prod_{\substack{s=2\\ s\neq r}}^{n}\not{a}_s\right\},\ \ \forall\, \begin{matrix}a_1,\dots,a_n\in\mathcal{S}\\ n\in 2\cdot\mathbb{N}\end{matrix}} \qquad (29.15)$$

που είναι η ζητούμενη σχέση. Εφαρμογή της παραπάνω σχέσης για $n=4$ αποδίδει τετριμμένα, με εφαρμογή και της σχέσης (29.12), την εξής σχέση:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\} &= (a\cdot b)\mathrm{Tr}\{\not{c}\not{d}\} - (a\cdot c)\mathrm{Tr}\{\not{b}\not{d}\} + (a\cdot d)\mathrm{Tr}\{\not{b}\not{c}\}\\ &\overset{(29.12)}{=} (a\cdot b)4(c\cdot d) - (a\cdot c)4(b\cdot d) + (a\cdot d)4(b\cdot c) \ \Leftrightarrow\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}\{\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\} = 4[(a\cdot b)(c\cdot d) - (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)]\,,\ \ \forall\, a,b,c,d\in\mathcal{S}} \qquad (29.16)$$

που είναι το δεύτερο ζητούμενο του ερωτήματος.

v. Δεδομένης της (29.4), $(\gamma^0)^2 = I$, και της σχέσης (29.5), λαμβάνουμε, αξιοποιώντας και την σχέση $(29.7e)$, ότι:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^5\} \overset{(29.4)}{=} \mathrm{Tr}\{\gamma^0\gamma^0\gamma^5\} \overset{(29.7e)}{=} \mathrm{Tr}\{\gamma^0\gamma^5\gamma^0\} \overset{(29.5)}{=} -\mathrm{Tr}\{\gamma^0\gamma^0\gamma^5\} \overset{(29.4)}{=} -\mathrm{Tr}\{\gamma^5\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathrm{Tr}\{\gamma^5\} = 0} \qquad (29.17)$$

που είναι το ζητούμενο.

vi. Αναπτύσσοντας τα σύμβολα Feynman, αξιοποιώντας, μεταξύ άλλων, την αντιμεταθετική σχέση (29.2), καθώς και την παραπάνω σχέση (29.17), λαμβάνουμε για τυχόντες spinors $a, b \in \mathcal{S}$:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^5 \not{a}\not{b}\} \equiv \mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu\} \overset{(29.7a)}{=} a_\mu b_\nu \mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} \tag{29.18}$$

Θεωρούμε έναν δείκτη $\rho \in \{0,1,2,3\}$ τέτοιο, ώστε $\rho \neq \mu\ ,\ \rho \neq \nu$ και προφανώς $\rho \neq 5$. Ένας τέτοιος δείκτης πάντοτε *υπάρχει*, καθώς το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{0,1,2,3\}$ είναι μεγαλύτερο από δύο (δηλαδή μεγαλύτερο από τον αριθμό των ήδη δεδομένων δεικτών μ,ν). Από την αντιμεταθετική σχέση (29.2) έχουμε ότι (*επαναλαμβανόμενοι δείκτες πλέον δεν υποδηλώνουν άθροιση*):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} &\overset{(29.2)}{=} \mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{g^{\rho\rho}} \gamma^\rho \gamma^\rho \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu\right\} \overset{(29.7a)}{=} \frac{1}{g^{\rho\rho}} \mathrm{Tr}\{\gamma^\rho \gamma^\rho \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} \\
&\overset{\substack{(29.2)\\ \rho\neq 5}}{=} \frac{1}{g^{\rho\rho}} (-1) \mathrm{Tr}\{\gamma^\rho \gamma^5 \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\nu\} \overset{\substack{(29.2)\\ \rho\neq \mu}}{=} \frac{1}{g^{\rho\rho}} (-1)^2 \mathrm{Tr}\{\gamma^\rho \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu\} \\
&\overset{\substack{(29.2)\\ \rho\neq \nu}}{=} \frac{1}{g^{\rho\rho}} (-1)^3 \mathrm{Tr}\{\gamma^\rho \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\} \overset{(29.7e)}{=} \frac{1}{g^{\rho\rho}} (-1)^3 \mathrm{Tr}\{\gamma^\rho \gamma^\rho \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} \\
&\overset{(29.2)}{=} \frac{1}{g^{\rho\rho}} (-1)^3 \mathrm{Tr}\{g^{\rho\rho} I \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} \overset{(29.7a)}{=} (-1)^3 \mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} = 0\ , \qquad \forall\, \mu, \nu \in \{0,1,2,3\}} \tag{29.19}$$

Λόγω της (29.19), η σχέση (29.18), συνεπάγεται ότι:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\{\gamma^5 \not{a}\not{b}\} = 0\ , \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{S}} \tag{29.20}$$

Εργαζόμενοι όμοια για την δεύτερη προς απόδειξη σχέση, αναπτύσσοντας τα σύμβολα Feynman, αξιοποιώντας, μεταξύ άλλων, την αντιμεταθετική σχέση (29.2), καθώς και την παραπάνω σχέση (29.17), λαμβάνουμε για τυχόντες spinors $a, b, c, d \in \mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\} &\equiv \mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu a_\mu \gamma^\nu b_\nu \gamma^\rho c_\rho \gamma^\sigma d_\sigma\} \\
&\overset{(29.7a)}{=} a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma \mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\}
\end{aligned} \tag{29.21}$$

όπου τονίζεται ότι $\mu, \nu, \rho, \sigma \in \{0,1,2,3\}$. Από την αντιμεταθετική σχέση της άλγεβρας, (29.2), λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\} &\overset{(29.2)}{=} \mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu (2g^{\rho\sigma} I - \gamma^\sigma \gamma^\rho)\} \\
&\overset{(29.7a)}{=} 2g^{\rho\sigma} \mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu\} - \mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho\} \\
&\overset{(29.19)}{=} -\mathrm{Tr}\{\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\rho\}
\end{aligned}$$

και εντελώς όμοια προκύπτουν οι ακόλουθες ισότητες που αναδεικνύουν την *πλήρη αντισυμμετρικότητα* του ίχνους $\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\}$ ως προς την εναλλαγή οποιωνδήποτε *γειτονικών* δεικτών του:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} &= -\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} && (29.22a)\\ &= -\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\sigma\} && (29.22b)\\ &= -\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho\} && (29.22c)\end{aligned}$$

Επομένως, εάν οποιοιδήποτε δύο από τους δείκτες $\mu,\nu,\rho,\sigma\in\{0,1,2,3\}$ ήταν ίσοι, τότε με διαδοχική εναλλαγή γειτονικών δεικτών θα ήταν δυνατό οι πίνακες γ με αυτούς τους δείκτες να καθιστούν γειτονικοί, και εφόσον το γινόμενό τους θα ήταν, λόγω της σχέσης (29.2), ίσο με $g^{\alpha\alpha}I$ (όπου α ο κοινός δείκτης), ο τελικός πίνακας εντός του ίχνους θα αποκτούσε την μορφή $\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^{\alpha_1}\gamma^{\alpha_2}\}$, $\alpha_1,\alpha_2\in\{0,1,2,3\}$, και λόγω της (29.19), θα ισούταν με 0.

Συνεπάγεται, λοιπόν, ότι το ίχνος $\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\}$ της (29.21) προκύπτει εν γένει πιθανώς *μη – μηδενικό*, μόνον στην περίπτωση όπου οι $\mu,\nu,\rho,\sigma\in\{0,1,2,3\}$ είναι δείκτες όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους, *δηλαδή αποτελούν άρτιες ή περιττές μεταθέσεις του* 0123. Σε αυτή την περίπτωση, αξιοποιώντας τις σχέσεις εναλλαγής γειτονικών δεικτών, (29.22), και δεδομένου ότι κάθε εναλλαγή γειτονικών δεικτών συνεπάγεται και μία *μετάθεση* του συνόλου {0,1,2,3}, το ίχνος $\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\}$ ισούται με:

$$\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = \mathrm{sgn}\{\mu\nu\rho\sigma\}\,\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\}$$

όπου το $\mathrm{sgn}\{\mu\nu\rho\sigma\}\coloneqq(-1)^N$ συμβολίζει το *πρόσημο*, ή την *αρτιότητα*, της μετάθεσης $\mu\nu\rho\sigma$ του 0123, και ισούται με $+1$ (αντίστοιχα, -1) εάν ο αριθμός N των *αναστροφών* (εναλλαγών ζευγών στοιχείων) που απαιτείται ώστε το $\mu\nu\rho\sigma$ να αναχθεί στο 0123 είναι *άρτιος* (αντίστοιχα, *περιττός*). Από τον ορισμό του στοιχείου $\gamma^5\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, η τελευταία σχέση δίνει ότι:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} &= \mathrm{sgn}\{\mu\nu\rho\sigma\}\,\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\} = -i\,\mathrm{sgn}\{\mu\nu\rho\sigma\}\mathrm{Tr}\{\gamma^5 i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\}\\ &= -i\,\mathrm{sgn}\{\mu\nu\rho\sigma\}\,\mathrm{Tr}\{(\gamma^5)^2\} \overset{(29.4)}{=} -i\,\mathrm{sgn}\{\mu\nu\rho\sigma\}\,\mathrm{Tr}\{I\}\\ &\overset{\text{(i)}}{=} -4i\,\mathrm{sgn}\{\mu\nu\rho\sigma\}\end{aligned}$$

Εξ ορισμού, το πρόσημο μίας μετάθεσης ενός συνόλου στοιχείων διαφορετικών μεταξύ τους, ταυτίζεται με την τιμή του *πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή Levi – Civita*:

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\equiv\mathrm{sgn}\{\mu\nu\rho\sigma\}\,,\forall\,\mu\neq\nu\neq\rho\neq\sigma$$

ο οποίος, λόγω του αρνητικού προσήμου της μετρικής Minkowski, $g^{\mu\nu}$, γράφεται σε ανταλλοίωτη μορφή ως:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}=g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}g^{\rho\kappa}g^{\sigma\lambda}\varepsilon_{\alpha\beta\kappa\lambda}=-\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$$

και επομένως, η παραπάνω σχέση δίνει ότι:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\{\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\}=4i\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,,\forall\,\mu,\nu,\rho,\sigma\in\{0,1,2,3\}} \qquad (29.23)$$

όπου έχει ληφθεί υπόψιν και το γεγονός ότι ο τανυστής Levi – Civita αποδίδει μηδενική τιμή σε περιπτώσεις όπου τουλάχιστον δύο από τους εμπλεκόμενους δείκτες ταυτίζονται. Βάσει της (29.23), η σχέση (29.21) δίνει ότι:

$$\boxed{\mathrm{Tr}\{\gamma^5 \not{a}\not{b}\not{c}\not{d}\} = 4i\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_\mu b_\nu c_\rho d_\sigma\,, \qquad \forall\, a,b,c,d \in \mathcal{S}} \tag{29.24}$$

που είναι και το ζητούμενο.

Σημείωση: Όπως είναι γνωστό από την βασική Γραμμική Άλγεβρα, το ίχνος μίας απεικόνισης μεταξύ γραμμικών χώρων παραμένει *αναλλοίωτο* υπό μετασχηματισμούς ομοιότητας, και ειδικότερα υπό *μοναδιακούς (unitary) μετασχηματισμούς*. Υπό τον ισομορφισμό $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C}) \sim \mathbb{C}^{4\times 4}$, οι πίνακες – αντιπρόσωποι των στοιχείων γ της εμπλεκόμενης άλγεβρας Clifford μπορούν να μετασχηματιστούν με έναν μοναδιακό μετασχηματισμό στους πίνακες – αντιπροσώπους τους εντός κάποιας δεδομένης *αναπαράστασης* της $\mathrm{Cl}_{1,3}(\mathbb{C})$. Επομένως, προς απόδειξη όλων των παραπάνω ιδιοτήτων θα μπορούσε να επιλεχθεί μία δεδομένη αναπαράσταση, π.χ. η αναπαράσταση Dirac – Pauli ή η αναπαράσταση Weyl, και η ισχύς αυτών στο επίπεδο της άλγεβρας εξασφαλίζεται από το αναλλοίωτο του ίχνους σε μοναδιακούς μετασχηματισμούς.

vii. Οι ιδιότητες του ερωτήματος αυτού *δεν* ζητούνται στην ανατιθέμενη άσκηση, ωστόσο αποτελούν κομμάτι της αντίστοιχης άσκησης του υπό χρήση βιβλίου των Halzen & Martin, και πραγματοποιούνται για λόγους πληρότητας.

Η πρώτη ισότητα έπεται σχετικά απλά, αξιοποιώντας τον μετρικό τανυστή Minkowski:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu \underset{g^{\mu\nu}=g^{\nu\mu}}{=} g_{\mu\nu}\gamma^\nu\gamma^\mu \overset{(29.2)}{=} g_{\mu\nu}(2g^{\nu\mu} I - \gamma^\mu\gamma^\nu) = 2g_{\mu\nu}g^{\nu\mu} - g_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu$$
$$= 2g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - g_{\nu\mu}\gamma^\nu\gamma^\mu = 2\cdot(4) - \gamma_\nu\gamma^\nu \equiv 8 - \gamma_\mu\gamma^\mu \implies$$
$$\implies \boxed{\gamma_\mu\gamma^\mu = \gamma^\mu\gamma_\mu = 4} \tag{29.25}$$

όπου για την τελευταία ισότητα έγινε εναλλαγή του βωβού δείκτη $\nu \leftrightarrow \mu$, και αξιοποιήθηκε η γνωστή σχέση της μετρικής Minkowski:

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 4 \tag{29.26}$$

Για την δεύτερη ισότητα, έχουμε, αναπτύσσοντας το σύμβολο Feynman, ότι:

$$\gamma_\mu \not{a}\gamma^\mu \equiv \gamma_\mu\gamma^\nu a_\nu\gamma^\mu = a_\nu\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu \overset{(29.2)}{=} a_\nu\gamma_\mu(2g^{\nu\mu}I - \gamma^\mu\gamma^\nu)$$
$$= a_\nu\left(2g^{\nu\mu}\gamma_\mu - \gamma_\mu\gamma^\mu\gamma^\nu\right) \overset{(29.2)}{=} a_\nu(2\gamma^\nu - 4\gamma^\nu) = -2\gamma^\nu a_\nu \iff$$
$$\iff \boxed{\gamma_\mu \not{a}\gamma^\mu = -2\not{a}\,, \qquad \forall\, a \in \mathcal{S}} \tag{29.27}$$

όπου εξ ορισμού είναι $\gamma^\nu a_\nu \equiv \not{a}$. Τόσο η τρίτη όσο και η τέταρτη ισότητα προκύπτουν όμοια, αξιοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, μαζί με την αντιμεταθετική σχέση (29.2), και ιδιότητες ανύψωσης και καταβίβασης δεικτών. Οι πράξεις έχουν αναλυτικά ως εξής:

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma^\mu \equiv \gamma_\mu \gamma^\nu a_\nu \gamma^\rho b_\rho \gamma^\mu = a_\nu b_\rho \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu$$
$$\overset{(29.2)}{=} a_\nu b_\rho \gamma_\mu \gamma^\nu (2g^{\rho\mu} I - \gamma^\mu \gamma^\rho)$$
$$= a_\nu b_\rho \left(2g^{\rho\mu} \gamma_\mu \gamma^\nu - \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho\right)$$
$$\overset{(29.2)}{=} a_\nu b_\rho \left(2\gamma^\rho \gamma^\nu - \gamma_\mu [2g^{\nu\mu} I - \gamma^\mu \gamma^\nu] \gamma^\rho\right)$$
$$= a_\nu b_\rho \left(2\gamma^\rho \gamma^\nu - 2g^{\nu\mu} \gamma_\mu \gamma^\rho + \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho\right)$$
$$\overset{(29.25)}{=} a_\nu b_\rho (2\gamma^\rho \gamma^\nu - 2\gamma^\nu \gamma^\rho + 4\gamma^\nu \gamma^\rho)$$
$$\overset{(29.2)}{=} a_\nu b_\rho (2\gamma^\rho \gamma^\nu + 2\gamma^\nu \gamma^\rho) \overset{(29.2)}{=} 2a_\nu b_\rho g^{\nu\rho} \iff$$

$$\iff \boxed{\gamma_\mu \not{a}\not{b} \gamma^\mu = 4a \cdot b\,, \qquad \forall\, a, b \in \mathcal{S}} \tag{29.29}$$

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu \equiv \gamma_\mu \gamma^\nu a_\nu \gamma^\rho b_\rho \gamma^\sigma c_\sigma \gamma^\mu = a_\nu b_\rho c_\sigma \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu$$
$$\overset{(29.2)}{=} a_\nu b_\rho c_\sigma \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho (2g^{\sigma\mu} I - \gamma^\mu \gamma^\sigma)$$
$$= a_\nu b_\rho c_\sigma \left(2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\sigma\right)$$
$$\overset{(29.2)}{=} a_\nu b_\rho c_\sigma \left(2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma_\mu \gamma^\nu [2g^{\rho\mu} I - \gamma^\mu \gamma^\rho] \gamma^\sigma\right)$$
$$= a_\nu b_\rho c_\sigma \left(2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - 2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\sigma\right)$$
$$\overset{(29.2)}{=} a_\nu b_\rho c_\sigma \left(2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - 2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma + \gamma_\mu [2g^{\nu\mu} I - \gamma^\mu \gamma^\nu] \gamma^\rho \gamma^\sigma\right)$$
$$= a_\nu b_\rho c_\sigma \left(2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - 2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma + 2\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma - \gamma_\mu \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma\right)$$
$$\overset{(29.25)}{=} a_\nu b_\rho c_\sigma (2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - 2\gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma - 2\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma)$$
$$\overset{(29.2)}{=} a_\nu b_\rho c_\sigma (2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - 2[2g^{\rho\nu} I - \gamma^\nu \gamma^\rho] \gamma^\sigma - 2\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma)$$
$$\overset{(29.2)}{=} a_\nu b_\rho c_\sigma (2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - 4g^{\rho\nu} \gamma^\sigma) \equiv a_\nu b_\rho c_\sigma (2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - \gamma^\sigma g^{\nu\rho} 4)$$
$$\overset{(29.25)}{=} a_\nu b_\rho c_\sigma \left(2\gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho - 4\gamma^\sigma g^{\nu\rho} \gamma_\rho \gamma^\rho\right) \equiv -2a_\nu b_\rho c_\sigma \gamma^\sigma \gamma^\nu \gamma^\rho \iff$$

$$\iff \boxed{\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}\,, \qquad \forall\, a, b, c \in \mathcal{S}} \tag{29.30}$$

όπου στην τελευταία αξιοποιείται ο ορισμός του συμβολισμού Feynman, $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$, και οι ζητούμενες αποδείξεις ολοκληρώθηκαν. ■