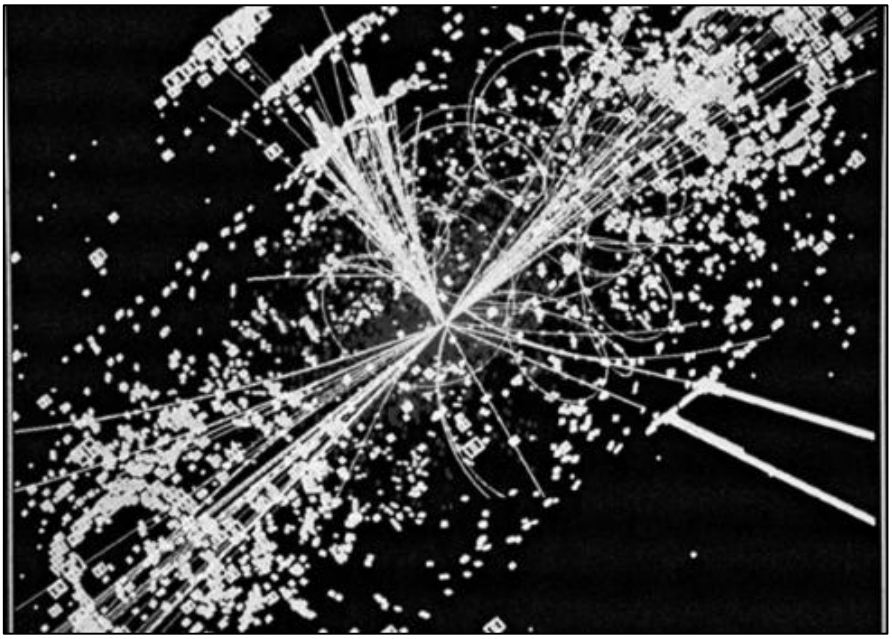
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, 2025 - 2026

Επίλυση Ασκήσεων Μαθήματος

Θεωρητική Φυσική

Ασκήσεις 30, 32



Ονοματεπώνυμο: Αναστάσιος Μπατατέγας
Αριθμός Μητρώου: 09121431
Εξάμηνο: $9^{ο}$
Σχολή: ΕΜΦΕ
Email: tasosmntdew@gmail.com , ge21431@mail.ntua.gr
Διδάσκων: Ν. Τράκας

Άσκηση 30

Υποθέτοντας την μορφή διανύσματος – αξονικού (ψευδο-)διανύσματος (μορφή V – A) για τον κόμβο αλληλεπίδρασης της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου φορτίου, δείξτε ότι στην διάσπαση του μ^-:

$$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

το ηλεκτρόνιο έχει αριστερόστροφη ιδιοκατάσταση χειραλικότητας (chirality), είναι δηλαδή αριστερόστροφο (L). Στην διάσπαση του μ^+:

$$\mu^+ \to e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

ποια είναι η χειραλικότητα (chirality) του ηλεκτρονίου;

Λύση

Προς επίλυση του προβλήματος, ακολουθούμε την ανάλυση και τον συμβολισμό των Σημειώσεων καθώς και του βιβλίου «*Quarks & Leptons* – F. Halzen, A. D. Martin». Οι δύο αντιδράσεις διάσπασης που αφορούν στην παρούσα άσκηση, θεωρούνται ως *αμιγώς* ασθενείς αλληλεπιδράσεις *φορτισμένου ρεύματος* (charged current), στις οποίες παρεμβάλλεται η ανταλλαγή ενός διανυσματικού μποζονίου $W^\pm$, με κατάλληλο φορτίο. Για την ασθενή αλληλεπίδραση φορτισμένου ρεύματος, υιοθετείται κόμβος αλληλεπίδρασης της μορφής:

$$\text{Κόμβος ασθ. αλλ. φορτισμένου ρεύματος: } \frac{g}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5) \qquad (30.1)$$

δηλαδή το άθροισμα μίας διανυσματικής (γ^μ) και αξονικά διανυσματικής ($\gamma^\mu\gamma^5$) συναλλοίωτης διγραμμικής μορφής (για την ακρίβεια, ο κόμβος αποτελείται από τους τελεστές – πίνακες που καθιστούν τον διγραμμικό συνδυασμό δύο spinors αναλλοίωτο υπό μετασχηματισμούς Lorentz, ήτοι συναλλοίωτο). Η σταθερά g (η οποία είναι ανάλογη της σταθεράς σύζευξης, g_W, της ασθενούς αλληλεπίδρασης φορτισμένου ρεύματος) τοποθετείται για διαστατικούς λόγους, και δεν μεταβάλλει τα επιχειρήματα που παρουσιάζονται παρακάτω, ενώ ο παράγοντας ½ τοποθετείται προς άμεση εμφάνιση του αντίστοιχου προβολικού τελεστή της L χειραλικότητας. Επομένως, η έκφραση του συναλλοίωτου ρεύματος για δύο spinors που αλληλεπιδρούν μέσω του κόμβου ασθενούς αλληλεπίδρασης (30.1) είναι ανάλογη της έκφρασης:

$$j^{(\mu)} \propto \bar{u}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)v \qquad (30.2)$$

για τυχόντες spinors $u, v \in \mathcal{S}$, όπου $\mathcal{S}$ ο γραμμικός χώρος των spinors που επάγεται της εξίσωσης Dirac.

Αξιοποιώντας την άλγεβρα Clifford των πινάκων γ, και το γεγονός ότι κάθε spinor μπορεί να αναλυθεί σε γραμμικό συνδυασμό των ιδιοκαταστάσεων χειραλικότητάς του, αποδεικνύεται ότι *η χειραλικότητα των σωματιδίων που συμμετέχουν στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις που περιγράφονται από τον κόμβο* (30.1) *διατηρείται, και αφορά μόνον σε σωματίδια αριστερόστροφης χειραλικότητας*. Πράγματι, θεωρώντας του προβολικούς τελεστές χειραλικότητας:

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\,, \qquad P_R \equiv \frac{1}{2}(1+\gamma^5) \tag{30.3}$$

κάθε spinor σωματιδίου $u \in \mathcal{S}$, αναλύεται στις ιδιοκαταστάσεις χειραλικότητάς του ως:

$$u \equiv P_L u + P_R u \equiv u_L + u_R\,, \qquad \forall\, u \in \mathcal{S} \tag{30.4}$$

Προς άμεση αναφορά στα όσα ακολουθούν, σημειώνονται οι παρακάτω ιδιότητες της άλγεβρας Clifford των πινάκων γ, σε σχέση με τον πίνακα $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ (βλ. και επίλυση της Άσκησης 29):

$$\gamma^{5\dagger} = \gamma^5\,, \qquad (\gamma^5)^2 = 1 \tag{30.5a}$$

$$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5\,, \qquad \forall\, \mu \in \{0,1,2,3\} \tag{30.5b}$$

Εύκολα μπορεί να προκύψει το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\bar{u}_L \equiv u_L^\dagger\gamma^0 = (P_L u)^\dagger\gamma^0 = u^\dagger P_L^\dagger\gamma^0 \overset{(30.3)}{=} u^\dagger\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^0 \overset{(30.5b)}{=} u^\dagger\frac{1}{2}\gamma^0(1+\gamma^5)$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{u}_L = \bar{u}\frac{1}{2}(1+\gamma^5) \equiv \bar{u}P_R \tag{30.6a}$$

και ομοίως:

$$\bar{u}_R = \bar{u}\frac{1}{2}(1-\gamma^5) \equiv \bar{u}P_L \tag{30.6b}$$

Θεωρούμε, τώρα, την γενική έκφραση που υπεισέρχεται στο συναλλοίωτο ρεύμα μία ασθενούς αλληλεπίδρασης (30.1), ήτοι για τυχόντες spinors $u, v \in \mathcal{S}$ είναι:

$$\begin{aligned}\bar{u}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)v &\overset{(30.3)}{=} (\bar{u}_L+\bar{u}_R)\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)(v_L+v_R)\\ &= \frac{1}{2}\bar{u}_L\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_L + \frac{1}{2}\bar{u}_R\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_R +\\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{u}_L\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_R + \frac{1}{2}\bar{u}_R\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_L\end{aligned} \tag{30.7}$$

Αποδεικνύουμε, στην συνέχεια, ότι οι όροι που περιπλέκουν προβολές των spinors με διαφορετική χειραλικότητα είναι μηδενικοί. Πράγματι, για τον πρώτο τέτοιο όρο είναι:

$$\begin{aligned}\bar{u}_L\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_R \equiv \bar{u}_L\gamma^\mu v_R - \bar{u}_L\gamma^\mu\gamma^5 v_R &\overset{(30.6a)}{=} \bar{u}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\gamma^\mu v_R - \bar{u}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\gamma^\mu\gamma^5 v_R\\ &\overset{(30.4)}{=} \bar{u}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\gamma^\mu\frac{1}{2}(1+\gamma^5)v - \bar{u}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\gamma^\mu\gamma^5\frac{1}{2}(1+\gamma^5)v\\ &\overset{(30.5)}{=} \bar{u}\gamma^\mu\frac{1}{4}\underbrace{(1-\gamma^5)(1+\gamma^5)}_{=0}v - \bar{u}\gamma^\mu\frac{1}{4}\underbrace{(1-\gamma^5)(1+\gamma^5)}_{=0}\gamma^5 v = 0\end{aligned}$$

και εργαζόμενοι όμοια λαμβάνουμε τελικά ότι:

$$\bar{u}_L\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_R = \bar{u}_R\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_L = 0 \tag{30.8a}$$

Επιπλέον, δείχνουμε ότι ο όρος που περιπλέκει προβολές των spinors με δεξιόστροφη χειραλικότητα είναι επίσης μηδενικός. Πράγματι:

$$\bar{u}_R\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_R \overset{(30.4),(30.6b)}{=} \bar{u}\frac{1}{2}(1-\gamma^5)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\frac{1}{2}(1+\gamma^5)v$$
$$\overset{(30.5)}{=} \bar{u}\frac{1}{4}(1-\gamma^5)\underbrace{(1-\gamma^5)(1+\gamma^5)}_{=0}v = 0$$
$$\Leftrightarrow \ \bar{u}_R\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_R = 0 \qquad (30.8b)$$

ενώ, υπολογίζοντας τον όρο που περιπλέκει προβολές των spinors αριστερόστροφης χειραλικότητας λαμβάνουμε μία ταυτοτική έκφραση του αρχικού ρεύματος (ένδειξη του μη – μηδενισμού του αντίστοιχου όρου του συναλλοίωτου ρεύματος):

$$\bar{u}_L\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_L \overset{(30.4),(30.6a)}{=} \bar{u}\frac{1}{2}(1+\gamma^5)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\frac{1}{2}(1-\gamma^5)v$$
$$\overset{(30.5)}{=} \bar{u}\frac{1}{4}\gamma^\mu(1-\gamma^5)(1-\gamma^5)(1-\gamma^5)v = \cdots$$
$$\cdots \overset{(30.5a)}{=} \bar{u}\gamma^\mu(1-\gamma^5)v$$

Η σχέση (30.7), λόγω των $(30.8a,b)$, συνεπάγεται ότι για κάθε ασθενή αλληλεπίδραση της θεωρούμενης μορφής (30.1), ισχύει ότι:

$$\boxed{\bar{u}\frac{1}{2}\gamma^\mu(1-\gamma^5)v = \frac{1}{2}\bar{u}_L\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_L\,, \qquad \forall\, u,v \in \mathcal{S}} \qquad (30.9)$$

σχέση που συνεπάγεται την *διατήρηση μόνον της αριστερόστροφης χειραλικότητας των σωματιδίων* σε όλες τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις της μορφής (30.1), εφόσον οι ιδιοκαταστάσεις χειραλικότητας καθενός εκ των συμμετεχόντων spinors *σωματιδίων* εμφανίζονται στο συναλλοίωτο ρεύμα *μόνον* μέσω αλληλεπιδράσεων κοινών ιδιοκαταστάσεων L χειραλικότητας. Προφανώς, θεωρώντας spinors *αντισωματιδίων*, μόνον οι *δεξιόστροφες* προβολές χειραλικότητας εμπλέκονται στην ασθενή αλληλεπίδραση (30.1), και είναι η *δεξιόστροφη χειραλικότητα αντισωματιδίων που διατηρείται*. Με βάση τα παραπάνω, πραγματοποιείται μελέτη των ζητούμενων αντιδράσεων διάσπασης των $\mu^\pm$, ως προς την χειραλικότητα των παραγόμενων σωματιδίων.

Για την διάσπαση $\mu^- \to e^-\nu_\mu\bar{\nu}_e$, η οποία θεωρείται ότι υφίσταται μέσω της ασθενούς αλληλεπίδρασης (30.1) το συμμετέχον μ^-, ως σωματίδιο, πρέπει, με βάση τα παραπάνω, να αλληλεπιδρά μέσω της *αριστερόστροφης* (L) συνιστώσας του, και επομένως, το νετρίνο ν_μ, το οποίο συνοδεύεται από την παραγωγή ενός διανυσματικού μποζονίου W^-, είναι *αριστερόστροφο* (L). Το μποζόνιο W^- διασπάται στο ζεύγος $(e^-,\bar{\nu}_e)$, και, δεδομένου ότι τα μόνα νετρίνο (αντίστοιχα, αντινετρίνο) που εμπλέκονται στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις είναι τα L (αντίστοιχα, τα R), έπεται ότι το $\bar{\nu}_e$ είναι *δεξιόστροφο* (R), γεγονός που, ενόψει της (30.9), καθιστά το παραγόμενο e^-, ως σωματίδιο, να είναι *αριστερόστροφο* (L).

Με εντελώς όμοια επιχειρήματα για την διάσπαση $\mu^+ \to e^+\bar{\nu}_\mu\nu_e$, το εισερχόμενο μ^+, ως αντισωματίδιο, συμμετέχει μόνο με την δεξιόστροφη (R) συνιστώσα του, και επομένως, το αντινετρίνο $\bar{\nu}_\mu$, το οποίο συνοδεύεται από την παραγωγή ενός διανυσματικού μποζονίου W^+, είναι *δεξιόστροφο* (R). Το μποζόνιο W^+ διασπάται στο

ζεύγος (e^+, ν_e), και, δεδομένου ότι τα μόνα νετρίνο (αντίστοιχα, αντινετρίνο) που εμπλέκονται στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις είναι τα L (αντίστοιχα, τα R), έπεται ότι το ν_e είναι *αριστερόστροφο* (L), γεγονός που καθιστά το παραγόμενο e^+, ως αντισωματίδιο, να είναι *δεξιόστροφο* (R).

Σημειώνεται ότι οι παραπάνω αναθέσεις χειραλικότητας (30.9), ισχύουν για κάθε αλληλεπίδραση που δίνεται από τον κόμβο (30.1). Ο καθορισμός των χειραλικοτήτων των ζευγών $(e^-, \bar{\nu}_e)$, (e^+, ν_e) στηρίζεται στην πρόταση ότι τα μόνα νετρίνο (αντίστοιχα, αντινετρίνο) που εμπλέκονται στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις είναι τα L (αντίστοιχα, τα R), γεγονός αυτό προκύπτει από τις σχέσεις (30.9), αλλά και από το ότι δεξιόστροφες (αντ. αριστερόστροφες) ιδιοκαταστάσεις χειραλικότητας νετρίνο (αντ. αντινετρίνο) *δεν έχουν παρατηρηθεί*. Ένα επιπλέον κρίσιμο σημείο είναι ότι, σε περίπτωση που οι υπό μελέτη διασπάσεις τελούνται στο υπερ-σχετικιστικό ενεργειακό όριο ($E \gg m_e, m_\mu$), τότε οι παραπάνω αναθέσεις *χειραλικότητας* (chirality) αποτελούν και αναθέσεις *ελικότητας* (helicity), καθώς στο όριο αυτό, οι ιδιοκαταστάσεις της μίας αποτελούν και ιδιοκαταστάσεις της άλλης[1]. ■

[1] Μάλιστα, η αντίστοιχη Άσκηση 6.4 στο βιβλίο των Halzen & Martin, υπαινίσσεται στο δεύτερο ερώτημα ταύτιση των δύο εννοιών, και επομένως, υπερ-σχετικιστικό όριο ενεργειών για τις δεδομένες αντιδράσεις διάσπασης των $\mu^\pm$.

Άσκηση 32

Δείξτε ότι η ενεργός διαφορική διατομή για την ελαστική σκέδαση μη – πολωμένων *υπερ-σχετικιστικών* ηλεκτρονίων από σημειακό στόχο με spin 0, δίνεται, στο σύστημα του εργαστηρίου, όπου ο στόχος θεωρείται ακίνητος, από τον τύπο:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{lab.}} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{4}}\right)\frac{E'}{E}\cos^2\frac{\theta}{2}$$

όπου E, E' οι ενέργειες του ηλεκτρονίου πριν και μετά την σκέδαση με τον στόχο, αντιστοίχως, θ η γωνία σκέδασης του ηλεκτρονίου ως προς την διεύθυνση σκέδασης στο σύστημα του εργαστηρίου, και $\alpha \equiv e^2/4\pi$ η σταθερά λεπτής υφής (σε φυσικές – Lorentz μονάδες). Η μάζα του ηλεκτρονίου αμελείται, $m_e \equiv 0$.

Λύση

Προς επίλυση του προβλήματος, ακολουθούμε την ανάλυση και τον συμβολισμό των Σημειώσεων καθώς και του βιβλίου «*Quarks & Leptons* – F. Halzen, A. D. Martin». Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου (lab frame), θεωρούμε ότι το ηλεκτρόνιο e^- (που θεωρείται αμελητέας μάζας σε σχέση με τον στόχο) προσπίπτει στον στόχο με τετραορμή[2] $\not{k} = (E, \mathbf{k})$, και σκαδαζόμενο (μετά συνοδείας ενός δυνητικού φωτονίου) εξέρχεται με τετραορμή $\not{k}' = (E', \mathbf{k}')$, σχηματίζοντας με την διεύθυνση πρόσπτωσης γωνία θ (γωνία σκέδασης). Ο στόχος, ο οποίος έχει μάζα M, θεωρείται αρχικά ακίνητος στο σύστημα του εργαστηρίου, ώστε η τετραορμή του είναι $\not{p} = (M, \mathbf{0})$ πριν την σκέδαση, ενώ μετά την αλληλεπίδραση με το δυνητικό φωτόνιο, η τετραορμή του ορίζεται ως $\not{p}' \equiv (p_0', \mathbf{p}')$. Ο στόχος θεωρείται ότι έχει spin 0 και επομένως υπακούει στην εξίσωση Klein – Gordon.

Ακολουθώντας την ανάλυση των Σημειώσεων, καθώς και του υπό χρήση βιβλίου των Halzen & Martin, χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα για το *μη – πολωμένο* αναλλοίωτο πλάτος (που εδώ προκύπτει λαμβάνοντας μέση τιμή επί των καταστάσεων spin *μόνον* του e^-, δεδομένου ότι ο στόχος έχει spin 0), ήτοι το εξής:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4}\, L_e^{\mu\nu} L_{\mu\nu}^{\text{target}} \tag{32.1}$$

όπου:

$$q \equiv \not{k} - \not{k}' \equiv \not{p}' - \not{p} \tag{32.2}$$

με την δεύτερη ισότητα να έπεται από την διατήρηση της τετραορμής μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης, και e το απόλυτο φορτίο του e^-, ενώ οι τανυστές $L_e^{\mu\nu}$ και $L_{\mu\nu}^{\text{target}}$ αφορούν στις μέσες τιμές (ως προς τις καταστάσεις spin) των τετραγώνων των πλατών αλληλεπίδρασης για τους κόμβους του e^- και του στόχου, αντιστοίχως. Από

[2] Για τα τετραδιανύσματα χρησιμοποιούνται καλλιγραφικά γράμματα, προς αποφυγή συγχύσεως στους τύπους που ακολουθούν. Εξυπακούεται ότι ο συμβολισμός $\not{k} \cdot \not{p}$ αφορά στο εσωτερικό γινόμενο που επάγεται από την μετρική Minkowski (με $\text{sgn} = -2$), ενώ ο συμβολισμός $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ αφορά στο εσωτερικό γινόμενο τριδιανυσμάτων που επάγεται από την συνήθη μετρική του $\mathbb{R}^3$.

τα θεωρήματα ιχνών για την ηλεκτροδυναμική σωματιδίων με spin $1/2$ προκύπτει η εξής έκφραση για τον τανυστή του ηλεκτρονίου:

$$\boxed{L_e^{\mu\nu} = 2\left(\not{k}'^{\mu}\not{k}^{\nu} + \not{k}'^{\nu}\not{k}^{\mu} - (\not{k}'\cdot\not{k} - m^2)g^{\mu\nu}\right)} \tag{32.3}$$

όπου m είναι η μάζα του ηλεκτρονίου, και $g^{\mu\nu}$ είναι ο μετρικός τανυστής Minkowski (με την συνήθη σύμβαση $\text{sgn} = -2$). Δεδομένου ότι ο στόχος είναι σωματίδιο spin 0, ο κόμβος αλληλεπίδρασης με το δυνητικό φωτόνιο θα αντιστοιχεί σε συναλλοίωτο ρεύμα (βλ. Κανόνες Feynmann QED για spin 0):

$$j_{\mu}^{\text{spin}-0} \propto (\not{p} + \not{p}')_{\mu} e^{i(\not{p}'-\not{p})\cdot x}$$

και κατ' επέκταση σε αναλλοίωτο πλάτος για αλληλεπίδραση spin-0 με spin-$1/2$ (που είναι η υπό μελέτη περίπτωση) της μορφής:

$$-i\mathcal{M}|_{(\text{spin}-0)} = -e^2\left(\bar{u}(\not{k}')\gamma^{\mu}u(\not{k})\right)\left(\frac{g^{\mu\nu}}{q^2}\right)(\not{p} + \not{p}')_{\nu}$$

επομένως, ενόψει της (32.1), έπεται ότι εξ ορισμού θα είναι:

$$L_{\mu\nu}^{\text{target}} \equiv \frac{1}{2}\sum_{\text{target spins}} (\not{p} + \not{p}')^{\mu}[(\not{p} + \not{p}')^{\nu}]^* \equiv \frac{1}{2}(\not{p} + \not{p}')_{\mu}[(\not{p} + \not{p}')_{\nu}]^* \iff$$

$$\boxed{L_{\mu\nu}^{\text{target}} = (\not{p} + \not{p}')_{\mu}(\not{p} + \not{p}')_{\nu}} \tag{32.4}$$

Αντικαθιστώντας τις (32.3) και (32.4) στην σχέση (32.1) λαμβάνουμε την:

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4}\,2\left(\not{k}'^{\mu}\not{k}^{\nu} + \not{k}'^{\nu}\not{k}^{\mu} - (\not{k}'\cdot\not{k} - m^2)g^{\mu\nu}\right)(\not{p} + \not{p}')_{\mu}(\not{p} + \not{p}')_{\nu}$$

$$\implies \overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{e^4}{q^4}\,2\left(\not{k}'^{\mu}\not{k}^{\nu} + \not{k}'^{\nu}\not{k}^{\mu} - (\not{k}'\cdot\not{k})g^{\mu\nu}\right)(\not{p} + \not{p}')_{\mu}(\not{p} + \not{p}')_{\nu} \tag{32.5}$$

όπου στην τελευταία συνεπαγωγή αγνοούμε τον όρο με την μάζα του e^- $(m \equiv 0)$, ως κατά πολύ μικρότερη της μάζας M του στόχου. Συνεχίζουμε εκτελώντας τις πράξεις στην (32.5), αξιοποιώντας και την σχέση $\not{p}' = \not{k} - \not{k}' + \not{p}$, που προκύπτει από την διατήρηση της τετραορμής μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης:

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= 2\frac{e^4}{q^4}\left[2\left(\not{k}'^{\mu}(\not{p} + \not{p}')_{\mu}\right)(\not{k}^{\nu}(\not{p} + \not{p}')_{\nu}) - (\not{k}'\cdot\not{k})g^{\mu\nu}(\not{p} + \not{p}')_{\mu}(\not{p} + \not{p}')_{\nu}\right] \\
&= 2\frac{e^4}{q^4}\left[2\left(\not{k}'\cdot(\not{p} + \not{p}')\right)\left(\not{k}\cdot(\not{p} + \not{p}')\right) - (\not{k}'\cdot\not{k})\left((\not{p} + \not{p}')\cdot(\not{p} + \not{p}')\right)\right] \\
&= 4\frac{e^4}{q^4}\left[\left(\not{k}'\cdot(\not{k} - \not{k}' + 2\not{p})\right)\left(\not{k}\cdot(\not{k} - \not{k}' + 2\not{p})\right) - \frac{1}{2}(\not{k}'\cdot\not{k})(\not{k} - \not{k}' + 2\not{p})^2\right] \\
&= 4\frac{e^4}{q^4}\Big\{\left[(\not{k}'\cdot\not{k}) - \not{k}'^2 + 2(\not{k}'\cdot\not{p})\right]\left[-(\not{k}\cdot\not{k}') + \not{k}^2 + 2(\not{k}\cdot\not{p})\right] \\
&\qquad - \frac{1}{2}(\not{k}'\cdot\not{k})\left[\not{k}^2 + \not{k}'^2 + 4\not{p}^2 - 2(\not{k}'\cdot\not{k}) + 4(\not{k}\cdot\not{p}) + 4(\not{k}'\cdot\not{p})\right]\Big\}
\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο επιβάλλουμε στην έκφραση του μέσου αναλλοίωτου πλάτους τις *κινηματικές* συνθήκες της υπό μελέτη σκέδασης (έχουμε ήδη αγνοήσει όρους ανάλογους προς την μάζα του e^-). Το e^- θεωρείται στο υπερ-σχετικιστικό όριο υψηλών ενεργειών, επομένως $\not{k}^2 \equiv m \equiv E^2 - \mathbf{k}^2 \approx 0$, επομένως, στην τελευταία σχέση επιβάλλουμε την προσέγγιση:

$$\not{k}^2 = \not{k}' \approx 0\,, \qquad (\not{k}\cdot\not{k}')^2 \approx 0 \tag{32.6}$$

όπου η δεύτερη προσέγγιση προκύπτει άμεσα από την πρώτη, και λαμβάνουμε ότι:

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} = \quad & 4\frac{e^4}{q^4}\Big\{[(\not{k}'\cdot\not{k})+2(\not{k}'\cdot\not{p})][-(\not{k}\cdot\not{k}')+2(\not{k}\cdot\not{p})] \\ & \quad -\frac{1}{2}(\not{k}'\cdot\not{k})[4\not{p}^2-2(\not{k}'\cdot\not{k})+4(\not{k}\cdot\not{p})+4(\not{k}'\cdot\not{p})]\Big\} \\ \overset{(32.6)}{=} \; & 4\frac{e^4}{q^4}\{2(\not{k}'\cdot\not{k})[(\not{k}\cdot\not{p})-(\not{k}'\cdot\not{p})]+4(\not{k}'\cdot\not{p})(\not{k}\cdot\not{p}) \\ & \quad -2(\not{k}'\cdot\not{k})[\not{p}^2+(\not{k}\cdot\not{p})+(\not{k}'\cdot\not{p})]\} \\ = \; & 8\frac{e^4}{q^4}[2(\not{k}'\cdot\not{p})(\not{k}\cdot\not{p})-(\not{k}'\cdot\not{k})\not{p}^2]\end{aligned}$$

Δεδομένων των προσεγγίσεων (32.6), μπορεί να προκύψει και η εξής κινηματική προσέγγιση:

$$q^2 \equiv (\not{k}-\not{k}')^2 \overset{(32.6)}{\approx} -2(\not{k}\cdot\not{k}') = -2(E'E - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}) \overset{\substack{|\mathbf{k}|\approx E \\ |\mathbf{k}'|\approx E'}}{\approx} -2E'E(1-\cos\theta)$$

$$\Longrightarrow q^2 \approx -2(\not{k}\cdot\not{k}') \approx -4EE'\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{32.7}$$

Επιπλέον, δεδομένων των ορισμών των τετραορμών των εμπλεκόμενων σωματιδίων, υπολογίζουμε ότι:

$$\not{k}\cdot\not{p} = EM\,, \qquad \not{k}'\cdot\not{p} = E'M\,, \qquad \not{p}^2 = M^2 \tag{32.8}$$

Βάσει των (32.7), (32.8), η έκφραση του μέσου αναλλοίωτου πλάτους γράφεται:

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|^2} & \overset{(32.7)}{\approx} 8\frac{e^4}{q^4}\left[2E'EM^2+\frac{1}{2}q^2M^2\right] = 8\frac{e^4}{q^4}2E'EM^2\left[1+\frac{q^2}{4EE'}\right] \\ & \overset{(32.7)}{\approx} 8\frac{e^4}{q^4}2E'EM^2\left[1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right]\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{8e^4}{q^4}2E'EM^2\left\{\cos^2\frac{\theta}{2}\right\}} \tag{32.9}$$

Προς υπολογισμό της διαφορικής ενεργούς διατομής, χρησιμοποιούμε την γενική σχέση (που έχει προκύψει σε προκύψει σε προηγούμενο κεφάλαιο):

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4ME}\frac{\overline{|\mathcal{M}|^2}}{4\pi^2}\frac{1}{2}E'\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega\,\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'}{2p_0'}\,\delta^{(4)}(\not{p}+q-\not{p}') \tag{32.10}$$

όπου η ροή είναι το γινόμενο των πυκνοτήτων δέσμης e^- και στόχου (όρος $(2E)(2M)$) επί την σχετική ταχύτητα e^- και στόχου, ίση πρακτικά με c ($c \equiv 1$ σε φυσικές μονάδες), αμελώντας την μάζα του e^- και θεωρώντας τον στόχο ακίνητο. Ακολουθώντας την διαδικασία των Σημειώσεων και του υπό χρήση βιβλίου, υπολογίζουμε (για την απόδειξη βλ. Σημειώσεις και Halzen & Martin) ότι:

$$\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}'}{2p_0'}\,\delta^{(4)}(\not{p}+q-\not{p}') = \frac{1}{2M}\delta\left(\nu+\frac{q^2}{2M}\right) = \frac{1}{2MA}\delta\left(E'-\frac{E}{A}\right) \qquad (32.11)$$

όπου ορίζουμε $A \equiv 1 + (2E/M)\sin^2\theta/2$. Εισάγοντας την (32.9) στην (32.10), και αξιοποιώντας την ολοκλήρωση του Lorentz αναλλοίωτου παράγοντα φασικού χώρου, σχέση (32.11), λαμβάνουμε ότι:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}E'\mathrm{d}\Omega} = \frac{(2\alpha E')^2}{q^4}\left\{\cos^2\frac{\theta}{2}\right\}\delta\left(E'-\frac{E}{A}\right)$$

όπου έχει εισαχθεί η σταθερά λεπτής υφής $\alpha \equiv e^2/4\pi$ (σε φυσικές – Lorentz μονάδες). Από την τελευταία σχέση, ολοκληρώνοντας ως προς $\mathrm{d}E'$, αξιοποιώντας την δεύτερη ισότητα του αποτελέσματος (32.11), λαμβάνουμε τελικά το αποτέλεσμα:

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\text{lab.}} = \left(\frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{4}}\right)\frac{E'}{E}\cos^2\frac{\theta}{2}} \qquad (32.12)$$

που είναι το ζητούμενο. Διακρίνουμε την εξάρτηση της διαφορικής ενεργούς διατομής από τον όρο $\cos^2(\theta/2)$, ο οποίος είναι χαρακτηριστικός του γεγονότος ότι ο στόχος αποτελεί σωματίδιο με spin 0. ■