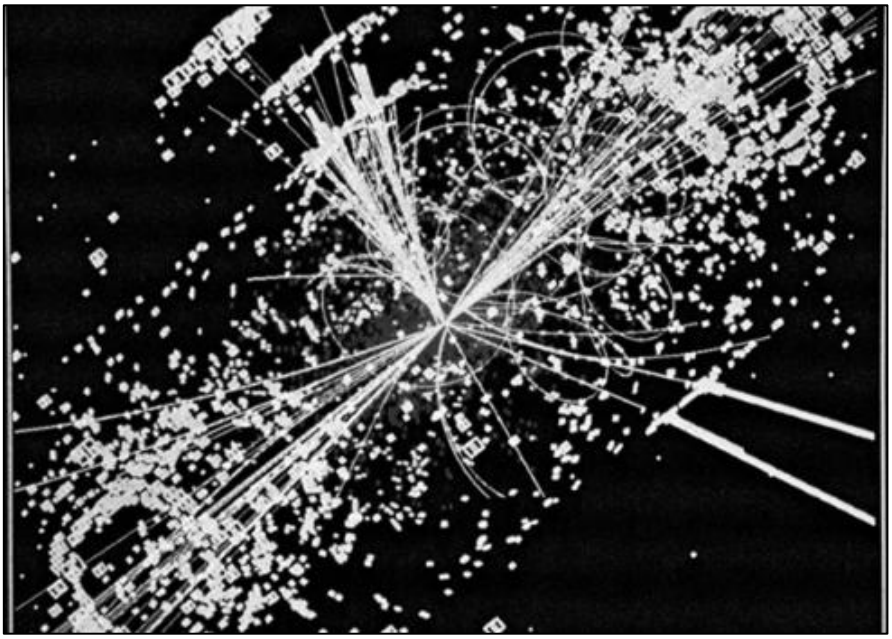
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ, 2025 - 2026

Επίλυση Ασκήσεων Μαθήματος

Θεωρητική Φυσική

Ασκήσεις 35, 36



Ονοματεπώνυμο: Αναστάσιος Μπατατέγας
Αριθμός Μητρώου: 09121431
Εξάμηνο: $9^{ο}$
Σχολή: ΕΜΦΕ
Email: tasosmntdew@gmail.com , ge21431@mail.ntua.gr
Διδάσκων: Ν. Τράκας

Άσκηση 35

Για ένα διανυσματικό (spin 1) σωματίδιο, μάζας M, η εξίσωση χρονικής εξέλιξης για την «κυματοσυνάρτησή»[1] του, $B_\mu = B_\mu(x)$, στην αναπαράσταση x τετραθέσης, είναι:

$$(\square^2 + M^2)B_\mu = 0$$

υπό την ταυτότητα $\partial^\mu B_\mu = 0$. Η εξίσωση χρονικής εξέλιξης αποδίδει λύσεις ελεύθερου σωματιδίου της γνωστής μορφής πυρήνα ενός κυματοπακέτου:

$$B_\mu(x) = \varepsilon_\mu(\mathcal{p})e^{-\mathcal{p}\cdot x}\,; \quad \mathcal{p}^\mu\varepsilon_\mu(\mathcal{p}) = 0$$

όπου $\varepsilon_\mu(\mathcal{p})$ το εκάστοτε τεράνυσμα πόλωσης του spin του σωματιδίου, που αποτελεί επί της ουσίας την «κυματοσυνάρτησή» του στην αναπαράσταση $\mathcal{p}$ τετραορμής. Αποδεικνύεται ότι, λόγω του γεγονότος ότι το σωματίδιο έχει spin 1, τα διανύσματα πόλωσης (που αποτελούν βάση ιδιοκαταστάσεων του σωματιδίου στην αναπαράσταση τετραορμής $\mathcal{p}$) σχηματίζουν μη – αναγωγίσιμη αναπαράσταση της ομάδας $\mathrm{SU}(2)$ διάστασης 3, και μπορούν να αναχθούν ώστε να περιγράφουν τις τρεις καταστάσεις ελικότητας (helicity) του σωματιδίου, $\lambda \in \{0, \pm 1\}$, στην περίπτωση που αυτό κινείται ελεύθερα με τετραορμή $\mathcal{p}$. Σε αυτή την περίπτωση προκύπτει η *ορθοκανονική* βάση τετρανυσμάτων πόλωσης:

$$\left\{\varepsilon_\mu^{(\lambda=\pm1)}(\mathcal{p})\,, \varepsilon_\mu^{(\lambda=0)}(\mathcal{p})\right\}$$

Δείξτε ότι η σχέση πληρότητας των ιδιοκαταστάσεων της παραπάνω βάσης είναι η:

$$\sum_{\lambda\in\{0,\pm1\}} \left(\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right)^* \varepsilon_\nu^{(\lambda)}(\mathcal{p}) = -g_{\mu\nu} + \frac{\mathcal{p}_\mu\mathcal{p}_\nu}{M^2}$$

όπου $\mathcal{p}$ η τετραορμή του σωματιδίου, και $g_{\mu\nu}$ ο μετρικός τανυστής Minkowski (με την συνήθη σύμβαση $\mathrm{sgn} = -2$).

Λύση

Προς επίλυση του προβλήματος, ακολουθούμε την ανάλυση και τον συμβολισμό των Σημειώσεων καθώς και του βιβλίου «*Quarks & Leptons* – F. Halzen, A. D. Martin». Θεωρούμε ως δεδομένη την *ορθοκανονική* βάση τετρανυσμάτων πόλωσης:

$$\left\{\varepsilon_\mu^{(\lambda=\pm1)}(\mathcal{p})\,, \varepsilon_\mu^{(\lambda=0)}(\mathcal{p})\right\}$$

χωρίς να θεωρούμε κάποια συγκεκριμένη κατασκευή της (όπως π.χ. για σωματίδιο που κινείται επί του άξονα z – Βλ. Σημειώσεις). Θα γίνει χρήση της ταυτότητας Proca που προκύπτει για διανυσματικά σωματίδια μάζας M, ήτοι:

[1] Πιο αυστηρά, B_μ είναι ο κβαντικός *τελεστής* επί του οποίου δρα ο γενικός τελεστής Klein – Gordon, για σχετικιστικό σωματίδιο με spin 1. Στην εικόνα Heisenberg, η χρονική εξέλιξη των στοιχείων του αντίστοιχου χώρου Hilbert μεταβιβάζεται στους αντίστοιχους τελεστές, ήτοι σε ομοιομορφισμούς του χώρου αυτού επί του εαυτού του. Υπό αυτή την οπτική, η περιγραφή του σωματιδίου ως κβαντικού πεδίου, πραγματοποιείται μέσω του B_μ, επί του οποίου η παραπάνω εξίσωση δρα με τελεστές ανάλογους του κβαντικού τελεστή ορμής. Βλ. και Υποσημείωση 2, στην Άσκηση 36.

$$\mathcal{p}^{\mu}\varepsilon_{\mu}(\mathcal{p}) = 0\,, \qquad \forall\, \varepsilon_{\mu} \in \left\{\varepsilon_{\mu}^{(\lambda=\pm1)}(\mathcal{p})\,, \varepsilon_{\mu}^{(\lambda=0)}(\mathcal{p})\right\} \tag{35.1a}$$

καθώς και της σχέσης ορθοκανονικότητας της βάσης τερανυσμάτων πόλωσης:

$$\left(\left(\varepsilon^{(\lambda_1)}\right)^{\nu}(\mathcal{p})\right)^{*} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda_1)}(\mathcal{p}) = -\delta^{\lambda_1}{}_{\lambda_2} \tag{35.1b}$$

όπου το εσωτερικό γινόμενο λαμβάνεται με τον μιγαδικό συζυγή του ενός όρου (δηλ. ορίζει μία «ημι-γραμμική» – sesquilinear – απεικόνιση) ώστε το μέτρο του εκάστοτε διανύσματος πόλωσης να είναι πραγματικός αριθμός, και το πρόσημο «−» προκύπτει λόγω του (υπαινυσσόμενου) μετρικού τανυστή $g^{\nu\mu}$. Θεωρούμε, τώρα, την έκφραση πληρότητας της εν λόγω βάσης, την οποία, για ευκολότερη μετέπειτα αναφορά, αναθέτουμε στον ορισμό ενός «τανυστικού» τελεστή:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(\mathcal{p}) \equiv \sum_{\lambda\in\{0,\pm1\}} \left(\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right)^{*} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathcal{p}) \tag{35.2}$$

Η χρήση της αναπαράστασης x για την κατάσταση του σωματιδίου, $B_{\mu} = B_{\mu}(x)$, συνεπάγεται ότι κάθε τανυστικός τελεστής $T_{\mu\nu}(\mathcal{p}) : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ είναι ομαλή συνάρτηση του τελεστή της ορμής, $\mathcal{p}$, και μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά «δυνάμεων» του $\mathcal{p}$, ανάλογα με την τάξη που οφείλει να έχει. Έπεται, ότι η ανάπτυξη σε «δυνάμεις» του εν λόγω τελεστή (35.2), αποτελεί αναγκαστικά γραμμικό συνδυασμό των τανυστικών τελεστών $g_{\mu\nu}$ και $\mathcal{p}_{\mu}\mathcal{p}_{\nu}$:

$$\mathcal{P}_{\mu\nu}(\mathcal{p}) \equiv A(\mathcal{p}^2)g_{\mu\nu} + B(\mathcal{p}^2)\mathcal{p}_{\mu}\mathcal{p}_{\nu} \tag{35.3}$$

όπου οι συντελεστές A, B οφείλουν να είναι βαθμωτές κατά Lorentz ποσότητες, και επομένως, μπορούν να εξαρτώνται το πολύ από την Lorentz αναλλοίωτη έκφραση $\mathcal{p}^2 \equiv \mathcal{p}^{\mu}\mathcal{p}_{\mu} \equiv g^{\mu\nu}\mathcal{p}_{\nu}\mathcal{p}_{\mu}$ (όπως επιβάλλει η τάξη του αναπτύγματος).

Δρώντας στην (35.3) με τον τελεστή $\mathcal{p}^{\mu}$, σχηματίζοντας συστολή του δείκτη μ, λαμβάνουμε, δεδομένης και της σχέσης ορισμού (35.2), ότι:

$$\mathcal{p}^{\mu}\mathcal{P}_{\mu\nu}(\mathcal{p}) \overset{(35.2)}{\widehat{=}} \mathcal{p}^{\mu}\left(\sum_{\lambda\in\{0,\pm1\}} \left(\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right)^{*} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right) \overset{(35.3)}{\widehat{=}} \mathcal{p}^{\mu}\left(A(\mathcal{p}^2)g_{\mu\nu} + B(\mathcal{p}^2)\mathcal{p}_{\mu}\mathcal{p}_{\nu}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\{0,\pm1\}} \mathcal{p}^{\mu}\left(\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right)^{*} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathcal{p}) = A(\mathcal{p}^2)g_{\mu\nu}\mathcal{p}^{\mu} + B(\mathcal{p}^2)\left(\mathcal{p}^{\mu}\mathcal{p}_{\mu}\right)\mathcal{p}_{\nu}$$

$$\overset{\substack{\mathcal{p}^{\mu}=(-\mathcal{p}^{\mu})^{*} \\ \mathcal{p}^{\mu}\mathcal{p}_{\mu}=-\mathcal{p}^2}}{\Leftrightarrow} \sum_{\lambda\in\{0,\pm1\}} \left(-\mathcal{p}^{\mu}\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right)^{*} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathcal{p}) = A(\mathcal{p}^2)\mathcal{p}_{\nu} - B(\mathcal{p}^2)\mathcal{p}^2\mathcal{p}_{\nu}$$

$$\overset{\substack{\mathcal{p}^2=M^2 \\ (35.1)}}{\Leftrightarrow} 0 = A(\mathcal{p}^2)\mathcal{p}_{\nu} - B(\mathcal{p}^2)M^2\mathcal{p}_{\nu} \Rightarrow \boxed{A(\mathcal{p}^2) = -M^2B(\mathcal{p}^2)} \tag{35.4}$$

όπου στην δεύτερη συνεπαγωγή, αξιοποιείται το γεγονός ότι στην αναπαράσταση τετραθέσης x, για τον τελεστή τετραορμής ισχύει ότι $\mathcal{p}^{\mu} = i\partial^{\mu}$, και κατά συνέπεια,

$\mathcal{p}^{\mu} = (-\mathcal{p}^{\mu})^{*}$. Επιπλέον, δρώντας στην (35.3) με τον μετρικό τανυστή $g^{\mu\nu}$, λαμβάνουμε ότι:

$$g^{\mu\nu}\mathcal{P}_{\mu\nu}(\mathcal{p}) \overset{(35.2)}{=} g^{\mu\nu}\left(\sum_{\lambda\in\{0,\pm1\}} \left(\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right)^{*} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right) \overset{(35.3)}{=} g^{\mu\nu}\left(A(\mathcal{p}^2)g_{\mu\nu} + B(\mathcal{p}^2)\mathcal{p}_{\mu}\mathcal{p}_{\nu}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\lambda\in\{0,\pm1\}} g^{\mu\nu}\left(\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right)^{*} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathcal{p}) = A(\mathcal{p}^2)g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + B(\mathcal{p}^2)\left(g^{\mu\nu}\mathcal{p}_{\mu}\mathcal{p}_{\nu}\right)$$

$$\overset{\substack{g^{\mu\nu}=(g^{\mu\nu})^{*}\\ g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=4}}{\Leftrightarrow} \sum_{\lambda\in\{0,\pm1\}} \left(g^{\mu\nu}\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right)^{*} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathcal{p}) = 4\,A(\mathcal{p}^2) + B(\mathcal{p}^2)\mathcal{p}^2$$

$$\overset{\mathcal{p}^2=M^2}{\Leftrightarrow} \sum_{\lambda\in\{0,\pm1\}} \left(\left(\varepsilon^{(\lambda)}\right)^{\nu}(\mathcal{p})\right)^{*} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathcal{p}) = 4\,A(\mathcal{p}^2) + M^2\,B(\mathcal{p}^2)$$

$$\overset{\substack{(35.1b)\\(35.4)}}{\Leftrightarrow} -3 = 3\,A(\mathcal{p}^2) \;\Rightarrow\; \boxed{A(\mathcal{p}^2) = -1} \overset{(35.4)}{\Rightarrow} \boxed{B(\mathcal{p}^2) = M^{-2}} \qquad (35.5)$$

Λόγω των αποτελεσμάτων της (35.5), οι σχέσεις (35.2) και (35.3) δίνουν την σχέση:

$$\boxed{\sum_{\lambda\in\{0,\pm1\}} \left(\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(\mathcal{p})\right)^{*} \varepsilon_{\nu}^{(\lambda)}(\mathcal{p}) = -g_{\mu\nu} + \frac{\mathcal{p}_{\mu}\mathcal{p}_{\nu}}{M^2}} \qquad (35.6)$$

που είναι η ζητούμενη σχέση πληρότητας των ιδιοκαταστάσεων της ορθοκανονικής βάση των τετρανυσμάτων πόλωσης. ■

Άσκηση 36

Η εξίσωση χρονικής εξέλιξης του φωτονίου μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\left(g^{\nu\lambda}\Box^2 - \partial^\nu\partial^\mu\right)A_\lambda = j^\nu$$

όπου $A_\lambda = A_\lambda(x)$ η «κυματοσυνάρτηση»[2] του φωτονίου στην αναπαράσταση x τετραθέσης, q, η εκάστοτε τετραορμή του, j το τετραδιανυσματικό ρεύμα, και $g^{\nu\lambda}$ ο μετρικός τανυστής Minkowski (με την σύμβαση $\text{sgn} = -2$). Δείξτε ότι ο αντίστροφος του τελεστή του αριστερού μέλους της παραπάνω εξίσωσης *δεν ορίζεται*, δηλαδή ότι ο τελεστής είναι ιδιάζων.

Λύση

Προς επίλυση του προβλήματος, ακολουθούμε την ανάλυση και τον συμβολισμό των Σημειώσεων καθώς και του βιβλίου «*Quarks & Leptons* – F. Halzen, A. D. Martin». Στην εικόνα Heisenberg, η κατάσταση ενός φωτονίου περιγράφεται μέσω της κβάντωσης του τελεστή $A^\lambda = A_\lambda(x)$ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στην βάση ιδιοκαταστάσεων τετραθέσης, x, του φωτονίου, η χρονική εξέλιξη του οποίου δίνεται από την συναλλοίωτη μορφή των εξισώσεων Maxwell:

$$\left(g^{\nu\lambda}\Box^2 - \partial^\nu\partial^\lambda\right)A_\lambda = j^\nu \tag{36.1}$$

όπου $\Box^2 \equiv \partial^\mu\partial_\mu$ ο τελεστής (υπερβολικής) απόκλισης d' Alembert. Συμβολίζουμε τον χώρο καταστάσεων του φωτονίου με $\mathcal{H}$, ώστε $A_\lambda(x) \in \mathcal{H}$, και, κατά τα γνωστά, ο $\mathcal{H}$ είναι ένας (διαχωρίσιμος) χώρος Hilbert. Στην παραπάνω εξίσωση χρονικής εξέλιξης, υπονοείται η κβάντωση της ορμής στην αναπαράσταση x, ήτοι:

$$q_\mu \equiv i\partial_\mu\,, \qquad \mu \in \{0,1,2,3\} \tag{36.2}$$

υπό την οποία, μπορούμε να γράψουμε την (36.1) στην παρακάτω μορφή:

$$Q^{\nu\lambda}(q)A_\lambda(x) \equiv \left(-g^{\nu\lambda}q^2 + q^\nu q^\lambda\right)A_\lambda(x) = j^\nu \tag{36.3}$$

όπου αξιοποιήθηκαν οι ισότητες τελεστών:

$$\Box^2 \equiv \partial^\mu\partial_\mu \equiv -q^2$$

$$\partial^\nu\partial^\lambda \equiv g^{\nu\rho}\partial_\rho g^{\lambda\sigma}\partial_\sigma = i^2 g^{\nu\rho}q_\rho g^{\mu\lambda}q_\sigma = -q^\nu q^\lambda$$

Στην (36.3) τονίζεται ότι οι εμφανιζόμενες ορμές δεν είναι παρά οι αντίστοιχοι *τελεστές ορμής*, υπό χρήση της αναπαράστασης τετραθέσης, x, και έχουμε ορίσει τον υπό εξέταση τελεστή:

[2] Πιο αυστηρά, A_λ είναι ο κβαντικός *τελεστής* που αντιστοιχεί στο κλασσικό τετραδιανυσματικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του φωτονίου. Στην εικόνα Heisenberg, η χρονική εξέλιξη των στοιχείων του αντίστοιχου χώρου Hilbert μεταβιβάζεται στους αντίστοιχους τελεστές, ήτοι σε ομοιομορφισμούς του χώρου αυτού επί του εαυτού του. Υπό αυτή την οπτική (αλλά και με λεπτομέρειες που αφορούν στην μέθοδο της δεύτερης κβάντωσης), η περιγραφή του φωτονίου ως κβαντικού πεδίου, πραγματοποιείται μέσω του A_λ, επί του οποίου η παραπάνω εξίσωση δρα με τελεστές ανάλογους του κβαντικού τελεστή ορμής (γίνεται χρήση της αναπαράστασης τετραθέσης).

$$\mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q) \equiv -g^{\nu\lambda}q^2 + q^\nu q^\lambda \tag{36.4}$$

του οποίου αναζητείται ο αντίστροφος, σε περίπτωση αυθαίρετης βαθμίδας για το A_λ.

Για να αποδείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q)\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *δεν* είναι αντιστρέψιμος, αρκεί να αποδειχθεί ότι ο πυρήνας (kernel) της απεικόνισης μεταξύ καταστάσεων που ορίζει *δεν* είναι τετριμμένος, ήτοι ότι:

$$\ker \mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q) \equiv \left\{A_\lambda(x) \in \mathcal{H} \,|\, \mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q)A_\lambda(x) = \mathbb{O}_{\mathcal{H}}\right\} \neq \{\mathbb{O}_{\mathcal{H}}\} \tag{36.5}$$

όπου $\mathbb{O}_{\mathcal{H}}$ το μηδενικό στοιχείο του χώρου $\mathcal{H}$ των καταστάσεων του φωτονίου. Δεδομένων των μετασχηματισμών βαθμίδας, στην αναπαράσταση ορμής, που αφήνουν αναλλοίωτο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο του φωτονίου:

$$A_\lambda(x) \to A'_\lambda(x) = A_\lambda(x) + \partial_\lambda \Lambda \equiv A_\lambda(x) - iq_\lambda \Lambda\,, \qquad \forall\, \Lambda \equiv \Lambda(x) \tag{36.6}$$

θα αποδείξουμε ότι σύνολο συναρτήσεων:

$$\mathrm{A}_0 \equiv \{A_\lambda(x) \mid \exists\, \Lambda(x) : A_\lambda(x) = -iq_\lambda \Lambda(x)\} \tag{36.7}$$

είναι υποσύνολο του πυρήνα του τελεστή $\mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q)$, δηλαδή ότι:

$$\mathrm{A}_0 \subset \ker \mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q) \tag{36.8}$$

Πράγματι, για οποιοδήποτε στοιχείο $A_\lambda^{(\mathrm{A}_0)}(x) = -iq_\lambda\Lambda(x) \in \mathrm{A}_0$, η δράση του εν λόγω τελεστή (36.4) δίνει ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q)A_\lambda^{(\mathrm{A}_0)}(x) &= \left(-g^{\nu\lambda}q^2 + q^\nu q^\lambda\right)\left(-iq_\lambda\Lambda(x)\right) \\
&= -i\left(-q^2\, g^{\nu\lambda}q_\lambda + q^\nu q^\lambda q_\lambda\right)\Lambda(x) \\
&= -i(-q^2 q^\nu + q^\nu q^2)\Lambda(x) \\
&= \mathbb{O}_{\mathcal{H}}\Lambda(x)
\end{aligned}$$

$$\implies \mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q)A_\lambda^{(\mathrm{A}_0)}(x) = \mathbb{O}_{\mathcal{H}}\,, \qquad \forall\, A_\lambda^{(\mathrm{A}_0)}(x) \in \mathrm{A}_0 \tag{36.9}$$

$$\Leftrightarrow\ \mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q)\mathrm{A}_0 = \{\mathbb{O}_{\mathcal{H}}\}\ \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{A}_0 \subset \ker \mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q)} \tag{36.10}$$

Επομένως, επειδή $\mathrm{A}_0 \neq \{\mathbb{O}_{\mathcal{H}}\}$, αφού τα στοιχεία του εξαρτώνται από το τετράνυσμα ορμής q, το οποίο δεν είναι απαραίτητα μηδενικό, έπεται ότι ισχύει η (36.5), και κατ' επέκταση, ο τελεστής $\mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q)$ της (36.4) *δεν είναι αντιστρέψιμος* (εφόσον η βαθμίδα του ηλεκτρομαγνητικού τελεστή *δεν* είναι καθορισμένη). Ας σημειωθεί ότι το γεγονός ότι το σύνολο A_0 είναι μη τετριμμένο οφείλεται στην απροσδιοριστία που εισαγάγει στην κατάσταση του φωτονίου η συνάρτηση $\Lambda(x)$, η οποία κατ' επέκταση, αφορά στον μη καθορισμό της βαθμίδας των A_λ (βλ. σχέση (36.6) παραπάνω). ■

Εναλλακτικός τρόπος απόδειξης.

Η απόδειξη μπορεί να πραγματοποιηθεί και με ένα επιχείρημα απαγωγής σε άτοπο (το οποίο είναι και αυτό που συστήνεται από το υπό χρήση βιβλίο των Halzen & Martin). Υποθέτουμε, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι ο «τανυστικός» τελεστής $\mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q)$ της (36.4) είναι αντιστρέψιμος. Επειδή είναι ανταλλοίωτος και ως προς τους δύο δείκτες του ν, λ, έπεται ότι ο αντίστροφός του θα πρέπει να μετασχηματίζεται, προφανώς, ως τανυστής

δεύτερης τάξης, και να είναι *συναλλοίωτος* και ως προς τους δύο δείκτες του. Επιπλέον, η χρήση της αναπαράστασης x για την κατάσταση του φωτονίου, $A_\lambda = A_\lambda(x)$, συνεπάγεται ότι κάθε τανυστικός τελεστής $T_{\mu\nu}(q): \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ είναι ομαλή συνάρτηση του τελεστή της ορμής, q, και μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά «δυνάμεων» του q, ανάλογα με την τάξη που οφείλει να έχει. Έπεται, ότι η ανάπτυξη σε «δυνάμεις» του αντιστρόφου, αποτελεί αναγκαστικά γραμμικό συνδυασμό των τανυστικών τελεστών $g_{\mu\nu}$ και $q_\mu q_\nu$:

$$(\mathcal{Q}^{-1})_{\mu\nu}(q) \equiv A(q^2)q^2 g_{\mu\nu} + B(q^2)q_\mu q_\nu \tag{36.11}$$

όπου οι συντελεστές A, B οφείλουν να είναι βαθμωτές κατά Lorentz ποσότητες, και επομένως, μπορούν να εξαρτώνται το πολύ από την Lorentz αναλλοίωτη έκφραση $q^2 \equiv q^\mu q_\mu$ (όπως επιβάλλει η τάξη του αναπτύγματος). Ο βαθμωτός παράγοντας q^2 που έπεται του συντελεστή A εισάγεται για απλοποίηση των πράξεων παρακάτω. Εξ ορισμού του αντιστρόφου ενός τελεστή, πρέπει:

$$(\mathcal{Q}^{-1})_{\mu\nu}(q)\mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q) \equiv (\mathrm{id}_{\mathcal{H}\to\mathcal{H}})_\mu{}^\lambda \equiv \delta_\mu{}^\lambda \tag{36.12}$$

Αντικαθιστώντας τις (36.11) και (36.4) στην τελευταία σχέση παίρνουμε ότι πρέπει:

$$\begin{aligned}
\delta_\mu{}^\lambda &= \big(A(q^2)q^2 g_{\mu\nu} + B(q^2)q_\mu q_\nu\big)\big(-g^{\nu\lambda}q^2 + q^\nu q^\lambda\big) \\
&= -A(q^2)q^4 g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda} + A(q^2)q^2 g_{\mu\nu}q^\nu q^\lambda - B(q^2)q^2 q_\mu q_\nu g^{\nu\lambda} + B(q^2)q_\mu q_\nu q^\nu q^\lambda \\
&= -A(q^2)q^4\delta_\mu^\lambda + A(q^2)q^2 q_\mu q^\lambda - B(q^2)q^2 q_\mu q^\lambda + B(q^2)q^2 q_\mu q^\lambda \\
&= -A(q^2)q^4\delta_\mu^\lambda + A(q^2)q^2 q_\mu q^\lambda
\end{aligned}$$

$$\implies A(q^2)q^2\big(-q^2\delta_\mu^\lambda + q_\mu q^\lambda\big) = \delta_\mu{}^\lambda \tag{36.13}$$

Οι τελεστές $\delta_\mu^\lambda \equiv g_{\mu\nu}g^{\nu\lambda}$ και $q_\mu q^\lambda$ είναι τανυστικώς ανεξάρτητοι, και επομένως για να ικανοποιείται η (36.13), πρέπει να ισχύουν, για κάθε ορμή q του φωτονίου, ταυτόχρονα οι συνθήκες:

$$-A(q^2)q^4 = \mathbb{I}_{\mathcal{H}} \tag{36.14a}$$

$$A(q^2)q^2 q_\mu q^\lambda = \mathbb{O}_{\mathcal{H}} \tag{36.14b}$$

όπου $\mathbb{I}_{\mathcal{H}}$, $\mathbb{O}_{\mathcal{H}}$ το ταυτοτικό και το μηδενικό στοιχείο του χώρου Hilbert, $\mathcal{H}$, των καταστάσεων του φωτονίου. Προφανώς, η (36.14b) αποδίδει ότι $A(q^2) = \mathbb{O}_{\mathcal{H}}$, γεγονός το οποίο καθιστά αδύνατη την (36.14a). Επομένως, για καμία τιμή των συντελεστών του γενικού αναπτύγματος (36.11) δεν μπορεί να ισχύει η συνθήκη αντιστροφής (36.12), επομένως ο τελεστής $\mathcal{Q}^{\nu\lambda}(q)$ *δεν είναι αντιστρέψιμος*. ■